Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat (BMETE95MF00) ütemterv

2012 ősz

1. **Matematikai eszközök (részben ismétlés)**

   (a) Mérték- és integrálelmélet (dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel, Radon-Nykodim tétel, feltételes várható érték, Haar mérték) **(szept. 7.)** (*Mogy*)

   - R. B. Ash: Measure, integration, and functional analysis
   - P. Walters: Ergodic theory: introductory lectures (Haar mérték)

   (b) Komplex függvénytan **(szept. 14.)** (*Mogy*)

   - Laurent sorfejtés, konform leképzések, kontúrintegrálok, Fourier-Laplace transzformáció

2. **Parciális diffegyenletek:**

   (a) Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldása (tér- és időváltozók szeparálása, Fourrier módszerek, Green függvény) **(szept. 21.)** (*Mogy*)

   - L. C. Evans: Partial differential equations

   (b) Nemlineáris parciális differenciálegyenletek: megmaradási törvények és Hamilton-Jacobi egyenletek, nemlineáris hullámok **(szept. 28.)** (*Mogy*)

   - L. C. Evans: Partial differential equations

3. **Ergodelmélet és dinamikai rendszerek:** Alap definíciók, ergodtételek, alkalmazások; fraktálok **(okt. 5.)** (*Mogy*)

   - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems

1. **Beszámolók: (okt. 12.)**

4. **Topológia, differenciálgeometria alapfogalmai** (sokaságok, külső szorzás, térfogati formák, ...), Lie-csoportok **(okt. 19., 26.)** (*PG*)

   - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
   - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

5. **Sztochasztikus folyamatok:** Fizikához közeli folyamatok és alkalmazások

   (a) Markov folyamatok: diszkrét időben (pl. bolyongások, esetleg kapcsolat áramkörökkel), Poisson folyamat, folytonos idejű ugró és nem ugró folyamatok (Brown-mozgás és hővezetési egyenlet) **(nov. 9., 10.)** (*PG*)

   - S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes

6. **A statisztikus fizika matematikai módszereib?l:**

   (a) Néhány példa a fázisátalakulásokkal kapcsolatos tételekre és bizonyításukra (dualitás, kontúrok?); pár szó a perkolációról **(nov. 16.)** (*PG*)

   - G. Grimmett: Percolation

2. **Beszámolók: (nov. 30.)**

3. **Beszámolók: (dec. 7.)**

Dátum	**Téma**	**Beadandó**
szept. 7.	Mértékelmélet	-
szept. 14.	Komplex függvénytan	**HF#1**
szept. 21.	Lineáris parc. diff.egyenletek	**HF#2**
szept. 28.	Nemlineáris parc. diff.egyenletek	**HF#3**
okt. 5.	Ergodelmélet	**HF#4**
okt. 12.	-	**1. beszámoló**
okt. 19.	Topológia, diff.geo. alapjai	**HF#5**
okt. 26.	Differenciálgeometria	**HF#6**
nov. 9.	Sztochasztikus foly.	**HF#7**
nov. 10.	Sztochasztikus foly. (nov. 2. helyett)	**HF#8**
nov. 16.	Stat. fiz.	**HF#9**
nov. 23.	-	**nyílt nap**
nov. 30.	-	**2. beszámoló**
dec. 7.	-	**3. beszámoló**

Összetettebb feladatok az 1. beszámolóra itt lesznek hamarosan. Házi feladatok a következő oldalakon.

Pete Gábor, Tóth Imre Péter

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2012 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el.

1. HF: (Beadási határidő: 2012.09.18.)

HF 1.1 •• *A mérték folytonossága*

(a) Bizonyítsuk be a következő állítást:

1. Tétel. *(A mérték folytonossága)*

i. *Ha $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és $A_1, A_2, \ldots$ mérhető halmazoknak egy növekvő sorozata (vagyis $A_i \in \mathcal{F}$ és $A_i \subset A_{i+1}$ minden i-re), akkor $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (és az egyenlőség mindkét oldala értelmes).*

ii. *Ha $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és $A_1, A_2, \ldots$ mérhető halmazoknak egy csökkenő sorozata (vagyis $A_i \in \mathcal{F}$ és $A_i \supset A_{i+1}$ minden i-re), továbbá $\mu(A_1) < \infty$, akkor $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)$ (és az egyenlőség mindkét oldala értelmes).*

(b) Mutassuk meg, hogy a második állításban a $\mu(A_1) < \infty$ feltételre szükség van. Ehhez konstruáljuk ellenpéldát az állításra olyan esetben, amikor ez a feltétel nem teljesül.

HF 1.2 ••• *Számláló mérték és Dirac mérték*

(a) Tekintsük a következő mértékteret: $X := \{1, 2, 3, \ldots\}$ legyen a természetes számok halmaza, $\mathcal{F} := 2^X$ a diszkrét σ-algebra X-en, μ pedig a *számláló mérték* X-en: minden $A \subset X$-re $\mu(A) := \#A$, vagyis minden halmaz mértéke az elemeinek a száma. Tekintsük továbbá az $f : X \to \mathbb{R}$, $f(n) := \frac{1}{2^n}$ függvényt. Mennyi az $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ integrál értéke?

(b) Tekintsük az $(X, \mathcal{F}) := (\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}})$ mérhető teret. Konstruáljuk meg ezen azt a δ mértéket, amire igaz, hogy bármely $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\delta = f(0)$. (Megkonstruálás alatt azt értem, hogy minden $A \subset \mathbb{R}$-re adjuk meg $\delta(A)$ értékét.) *Ezt a mértéket Dirac mérték néven tiszteljük.*

HF 1.3 •••• *Cantor halmazok*

(a) A *C triadikus Cantor-halmaz* konstrukciója a következő:

– Nulladik lépésben tekintsük a $[0, 1]$ zárt intervallumot: $C_0 := [0, 1]$.

– Első lépésben vágjuk ki ennek a középső nyílt 1/3-át – így marad 2 darab 1/3 hosszúságú zárt intervallum: $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

– Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt 1/3-át, így marad 4 darab 1/9 hosszúságú zárt intervallum – C_2 jelölje ezek unióját.

– És így tovább: az $n-1$-edik lépésben marad 2^n darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az n-edik lépésben kivágjuk a középső nyílt 1/3-át, így C_n már 2^{n+1} darab zárt intervallum uniója. **Rajzoljuk le!**

Végül $C := \cap_{n=0}^{\infty} C_n$, vagyis a C triadikus Cantor-halmazban azok a pontok vannak, akiket a végtelen sok lépés során sem vágunk ki.

i. Mutassuk meg, hogy C kontinuum számosságú (vagyis nagyon sok pontja van).

ii. Mutassuk meg, hogy C belseje üres.

iii. Mutassuk meg, hogy C Borel-mérhető. Mennyi C Lebesgue-mértéke?

(b) Módosítsuk most a konstrukciót a következőképpen:

– Nulladik lépésben tekintsük a $[0, 1]$ zárt intervallumot: $D_0 := [0, 1]$.

– Első lépésben vágjuk ki ennek a középső nyílt 1/4-ét – így marad 2 darab 3/8 hosszúságú zárt intervallum: $D_1 = [0, \frac{3}{8}] \cup [\frac{5}{8}, 1]$.
– Második lépésben vágjuk ki mindkettőnek a középső nyílt 1/9-ét, így marad 4 darab $(\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{9})$ hosszúságú zárt intervallum – D_2 jelölje ezek unióját.
– És így tovább: az $n-1$-edik lépésben marad 2^n darab zárt intervallum, melyek mindegyikének az n-edik lépésben kivágjuk a középső nyílt $1/(n+1)^2$ hányadát, így C_n már 2^{n+1} darab zárt intervallum uniója.

Végül $D := \cap_{n=0}^{\infty} D_n$.

i. D kontinuum számosságú, Borel mérhető és a belseje üres, pont olyan megfontolásból, mint C – ezt kár lenne újra leírni.

ii. Hát ennek a D-nek mennyi a Lebesgue-mértéke?

(Megjegyzés: a fenti C és D halmazok Lebesgue-mértékét nem nehéz pontosan kiszámolni, de engem igazából csak annyi érdekel, hogy nulla, vagy nem nulla.)

HF 1.4 ••• *A Fatou lemma* a következő

2. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és f_1, f_2, ... mérhető függvények sorozata ($f_n : \Omega \to \mathbb{R}$), amik nemnegatívak, vagyis $f_n(x) \geq 0$ minden $n = 1, 2, \ldots$-re és minden $x \in X$-re. Ekkor*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

(és mindekét oldal értelmes).

Mutassuk meg, hogy az ellentétes irányú egyenlőtlenség általában nem igaz. Ehhez legyen $X = \mathbb{R}$, válasszuk μ-t a Lebesgue mértéknek, és konstruáluk meg olyan $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemnegatív függvények egy sorozatát, amire $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, de $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \geq 1$ minden n-re.

2. HF: (Beadási határidő: 2012.09.21.)

HF 2.1 *Integrál és határérték felcserélhetősége.* Vizsgáljuk meg az alábbi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ és $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatokat a pontonkénti határértékük és az integráljaik határértéke szempontjából. Van-e olyan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, illetve $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, hogy $f_n(x) \to f(x)$, illetve $g_n(x) \to g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0,1]$-re? Mennyi $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)$ és $\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 g_n(x)dx\right)$? Teljesülnek-e a dominált konvergencia tétel, a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit mondanak ki ezek a tételek a konkrét esetekben?

(a) •••

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } 0 \leq x < 1/n, \\ 2n - n^2 x & \text{ha } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b) ••• Írjuk fel n-t $n = 2^k + l$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2\ldots$ és $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ (ez minden n -re egyértelműen megtehető). Legyen ezek után

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{2^k} \leq x < \frac{l+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

HF 2.2 ••• *Integrálok felcserélhetősége.* Tekintsük a következő $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 < x,\, 0 < y \text{ és } 0 \le x - y \le 1, \\ -1 & \text{ha} \quad 0 < x,\, 0 < y \text{ és } 0 < y - x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy$-t és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \right) dx$-t. Mi a helyzet a Fubini tétellel?

HF 2.3 *A karakterisztikus függvény differenciálhatósága.* Legyen μ egy *valószínűségi mérték* $\mathbb{R}$-en. Ennek *n-edik abszulut momentuma* ($n \in \mathbb{N}$-re) az

$$M_n := \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^n \, \mathrm{d}\mu(x)$$

integrál, *karakterisztikus függvénye* pedig a

$$\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(t) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} \, \mathrm{d}\mu(x)$$

függvény, ahol i a komplex egységgyök ($i^2 = -1$).

(Megjegyzés: Ha μ egy X valószínűségi változó eloszlása, ami annyit tesz, hogy minden B Borel-halmazra $\mu(B) := \mathbb{P}(X \in B)$, akkor $I_n = \mathbb{E}(|X|^n)$ és $\psi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$.)

Bizonyítsuk be a következő tételeket:

(a) •••

3. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága). *A fenti jelölésekkel, ha $I_1 < \infty$, akkor ψ folytonosan differenciálható és*

$$\psi'(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mu(x).$$

(b) ••

4. Tétel (A karakterisztikus függvény differenciálhatósága II). *A fenti jelölésekkel, ha $I_n < \infty$, akkor ψ n-szer folytonosan differenciálható és*

$$\psi^{(k)}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k \, \mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

3. HF: (Beadási határidő: 2012.10.03.)

HF 3.1 •••• **Tört-lineáris leképezések.** Tört-lineáris leképezésnek vagy lineáris tört-leképezésnek nevezzük a

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú leképezéseket, ahol a, b, c, d komplex számok és a tört nem egyszerüsíthető – vagyis $ad \neq bc$. Egy ilyen leképezés értelmezési tartománya a komplex számsík, kivéve az egyetlen $P = -\frac{d}{c}$ pontot. Ezen a tartományon a leképezés természetesen holomorf.

a.) Mutassuk meg, hogy egy ilyen leképezés, mint $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$-n értelmezett $\mathbb{R}^2$-értékű függvény, konform. (Útmutatás: ehhez milyen apróság is kell még azon kívül, hogy mint komplex függvény, holomorf?)

Érdekes és hasznos tény, hogy a tört-lineáris leképezések a sík minden egyenesét egyenesbe vagy körbe viszik át, és a sík köreit szintén egyenesbe vagy körbe. Ennek bizonyításáról szól ez a feladat.

b.) Legyen $z = x + iy$ és $w = 1/z = u + iv$ ahol x, y, u, v valósak. Írjuk fel konkrétan az $u(x, y)$, $v(x, y)$ $x(u, v)$ és $y(u, v)$ függvényeket.

c.) Lássuk be, hogy a valós síkon minden kör és egyenes egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{1}$$

alakba írható. Fordítva, minden (1) egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben $B^2 + C^2 > 4AD$.

d.) Az előző két pont alapján mutassuk meg, hogy a $w = 1/z$ inverzió egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.

e.) Mutassuk meg, hogy z komplex affin transzformálása (azaz $\hat{z} = pz + q$; $p, q \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$) kört körbe visz és egyenest egyenesbe visz.

f.) Egy *lineáris törtleképezés*

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú, ahol $ad \neq bc$ komplex számok. Mutassuk meg, hogy akár z, akár w, vagy akár mindkettő komplex affin transzformálása után a transzformáltak között továbbra is egy lineáris törtleképzés a kapcsolat.

g.) Az előzőek alapján lássuk be, hogy bármely lineáris törtleképzés egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.

HF 3.2 Az előző feladatból tudjuk, hogy lineáris törtleképezések a sík minden körét egyenesbe vagy körbe viszik át.

a.) • Melyek azok a körök, amiket a $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ leképezés nem körbe, hanem egyenesbe visz? (Segítség: az egyenes nem korlátos halmaz, vannak pontjai „végtelen messze".)

b.) • Keressünk olyan konform leképezést, ami a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ egységkörlapot a $H = \{(x, y) : y > 0\}$ felső félsíkba viszi. (Útmutatás: először csak vigyük a kört egy akármilyen egyenesbe, aztán szükség esetén toljuk el és forgassuk.)

c.) •• Legyen $A = (-2; 0)$, $B = (0; 2/3)$, $C = (2; 0)$, $D = (0; -1)$ a sík négy pontja. Legyen L az a „lencse alakú" korlátos, nyílt síkbeli halmaz, amit felülről az A, B, C pontokra illeszkedő körív, alulról pedig az A, D, C pontokra illeszkedő körív határol. Oldjuk meg ezen az L tartományon a

$$\Delta u = 0, \quad u = 0 \text{ az alsó köríven}, \quad u = 1 \text{ a felső köríven}$$

Dirichlet-feladatot! (Útmutatás: keressünk olyan konform leképezést, ami mindkét körívből (fél)egyenest csinál, az egyik metszéspontjukat pedig (a szépség kedvéért) az origóba viszi.)

d.) • Mik a hőáramlás görbéi (ha $u(x, y)$-t hőmérsékletnek tekintjük)? (Útmutatás: mi Arg harmonikus konjugáltja?)

HF 3.3 Dirichlet-feladatnak nevezzük azt, amikor a Laplace-egyenletet kell megoldanunk egy tartományon, a tartomány határán megadott peremfeltételek mellett. Tekintsük a Dirichlet-feladatot a felső félsíkon, *azonosan nulla* peremfeltétellel. Ennek természetesen megoldása az $u(x, y) \equiv 0$ azonosan nulla függvény.

a.) • Mutassuk meg, hogy az $u(x, y) = xy$ is megoldás.

b.) Emlékezzünk az előadásra: azt, hogy $u(x,y) = xy$ harmonikus, tudtuk anélkül, hogy lederiváltuk volna. Honnan is?

c.) • Ennek mintájára keressünk még nagyon sok megoldását a fenti Dirichlet-feladatnak. Ezután keressünk még ennél is több megoldást.

d.) Ha ezt a Dirichlet-problémát úgy nézzük, mint egy hővezetési feladatot egy fémlemezen, miért az $u(x,y) \equiv 0$ az egyetlen „fizikai" megoldás? Mi a baj a többivel?

e.) • Mutassuk meg, hogy a felső félsíkon a Dirichlet-problémának *bármilyen peremfeltétellel*, ha van egy megoldása, akkor nagyon sok megoldása is van. Mi alapján lehet ezek közül kiválasztani (épeszű peremfeltétel esetén) egy „fizikai" megoldást?

f.) • **bónusz:** Az egységkörlap (vagy a lencse) – mint az előző feladatban láttuk, és mint a Riemann leképezési tétel is állítja – konform ekvivalens a felső félsíkkal. Tekintsük hát most a Dirichlet feladatot az egységkörlapon (vagy a lencsén), azonosan nulla peremfeltétellel. Ez „lefordítható" a felső félsíkon vett Dirichlet-feladatra. Akkor ennek is végtelen sok megoldása van? Ez végképp ellentmondana a megoldásról mint stacionárius hőmérséklet-profilról alkotott képünknek. (Segítség: az egységkörlap mint *nyílt halmaz* volt konform-ekvivalnes a félsíkkal mint *nyílt halmazzal*, és a Laplace-egyenlet is a nyílt halmazon érvényes. Ehhez képest a peremfeltételt a körvonalon adom meg, ami nincs is benne a halmazban. Hogy is kell akkor a peremfeltételt érteni?)

4. HF: (Beadási határidő: 2012.10.05.)

HF 4.1 •••• Keressük meg azt az $u = u(t,x,y)$ valós-értékű differenciálható függvényt, ami eleget tesz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)^2$$

parciális differenciálegyenletnek és a

$$u(0,x,y) = \frac{x^2}{1+2y^2}$$

peremfeltételnek.

HF 4.2 •••• **Reprezentációs formula.** Mutassuk meg, hogy ha az $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (a teljes téren értelmezett) kétszer folytonosan differenciálható *korlátos* függvény eleget tesz a

$$-\Delta u = f$$

Poisson-egyenletnek, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható és *kompakt tartójú*, és $n \geq 3$, akkor biztosan

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y) dy + C$$

alakú valamilyen $C \in \mathbb{R}$-rel – ahol Φ az n-dimenziós Laplace-egyenlet alapmegoldása. Segítség:

- Előadáson zárójelben elhangzott: *Liouville tétele szerint ha egy függvény a teljes $\mathbb{R}^n$-en harmonikus és még korlátos is, akkor konstans.*
- Azt már tudjuk, hogy a fenti képlettel adott függvények megoldások. Honnan is?
- Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos.
- $n \geq 3$-ra Φ a végtelenben lecseng.
- Két tetszőleges korlátos megoldás különbségére alkalmazzuk a Liouville tételt!

HF 4.3 **Harmonikus függvények középérték-tulajdonsága.** Jelölje $B(x,r)$ az x középpontú r sugarú (tömör, zárt) gömböt (golyót) $\mathbb{R}^n$-ben, $\partial B(x,r)$ pedig ennek határát, vagyis a gömbfelületet. Jelölje továbbá $|B(x,r)|$ a gömb térfogatát, $|\partial B(x,r)|$ pedig a felszínét. Bizonyítsuk be a következő tételeket:

(a) •••

5. Tétel (középérték-tulajdonság I). *Ha u harmonikus az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $B(x,r) \subset U$, akkor*

$$u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S,$$

vagyis a függvényérték a gömb középpontjában éppen a felületen felvett értékek átlaga. (Itt $\int . \, \mathrm{d}S$ sima skalár felületi integrál.)

(b) •

6. Tétel (középérték-tulajdonság II). *Ha u harmonikus az $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $B(x,r) \subset U$, akkor*

$$u(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} u(y) \, \mathrm{d}y,$$

vagyis a függvényérték a gömb középpontjában éppen a (tömör) gömb pontjaiban felvett értékek átlaga.

Segítség:

- A Gauss-féle divergenciatétel szerint ha a $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $V \subset U$ kompakt és a határa szakaszonként sima, valamint $f : U \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható (vektormező), akkor $\int_{\partial V} f \, \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \nabla f$. (A bal oldali integrál egy vektormezőnek vektor-felületi integrálja, a jobboldali egy skalár függvény térfogati integrálja.)
- Rögzített x mellett tekintsük a

$$\phi(r) := \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u \, \mathrm{d}S$$

  függvényt.
- $\phi(r)$ képletében végezzünk el egy integrál-helyettesítést úgy, hogy utána az integrálási tartomány már ne függjön r-től (legyen mondjuk $\partial B(0,1)$).
- Most már számolhatjuk $\phi'(r)$-t az integrál alá bederiválva.
- Írjuk $\phi'(r)$-t vektor-felületi integrál formájába és alkalmazzuk a divergenciatételt.

5. HF: (Beadási határidő: 2012.10.19.)

HF 5.1 ••• Legyen $(M, \mathcal{F}, T, \mu)$ endomorfizmus és $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mutassuk meg, hogy ha T^n ergodikus (μ-re nézve), akkor T is ergodikus.

(b) Mutassuk meg, hogy ennek megfordítása általában nem igaz.

HF 5.2 *A körvonal forgatása és a Weil tétel.* Tekintsük az $S := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fázisteret, ami egy körvonal (vagy ha tetszik, az 1-dimenziós tórusz, vagy az egységintervallum periodikus határfeltétellel), a Lebesgue mértékkel és a $T : x \mapsto x + \alpha$ leképezéssel, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Nem nehéz bebizonyítani (de most nem ez a feladat), hogy T endomorfizmus, ami pontosan akkor ergodikus, ha α irracionális. Ez a Birkhoff ergodtétel szerint azt jelenti, hogy ha α irracionális és $f : S \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrálható, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) = \int_S f \,\mathrm{dLeb}$$

teljesül *Lebesgue-majdnem minden* $x \in S$-re.

Weil tétele szerint viszont, ha f-et $f = \mathbf{1}_I$-nek választjuk, ahol $I \subset S$ egy intervallum, akkor ennél több is igaz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_I(T^k x) = \mathrm{Leb}(I)$$

teljesül *minden* $x \in S$-re, ha α irracionális. A bizonyítása ennek se nehéz, de most nem ez a feladat.

(a) •• Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2(x+k)$ értéke tipikus x-re?

(b) •• Mennyi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2(k)$? *(Tipp: ez az előzőnek könnyű következménye.)*

(c) •• (egy Arnold-feladat:) Tekintsük az $1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$ számok 10-es számrendszerbeli alakjainak első számjegyeit. Előfordul a 7? Hát a 8? Melyik a gyakoribb? *(Tipp:* $\log_{10} 2$ *irracionális.)*

HF 5.3 ••• *Gauss leképezés.* Tekintsük a $T : (0,1] \to (0,1]$, $Tx := \frac{1}{x} (\mathit{mod}\, 1)$ leképezést. (Vagyis Tx legyen az $\frac{1}{x}$ törtrésze, hacsak nem ez 0 lenne, mert akkor Tx legyen 1.) Mutassuk meg, hogy erre a leképezésre invariáns az a valószínűségi mérték $(0,1]$-en, aminek a sűrűségfüggvénye (a Lebesgue-re nézve) $\frac{const}{1+x}$. (Mennyi a konstans?)