3. feladatsor

Generátorfüggvény, egyszerű elágazó folyamat, nagy eltérések

2011. november 9.

Generátorfüggvény

1. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 3 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 5 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 7 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét.

2. Legyen $X_1, X_2, \dots$ független azonos, $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változók sorozata. Továbbá legyen N egy $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változó, amely független az X-ektől. Legyen $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Tudjuk, hogy $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}X_1$. Mutassuk meg, hogy a szórásnégyzetre a következő egyenlőség áll fenn:

$$\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{Var}(N)\mathbf{E}(X_1)^2 + \mathbf{E}(N)\mathbf{Var}(X_1).$$

3. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg az X generátorfüggvényét az első dobás szerinti feltételes felbontásból adódó rekurzió segítségével.

   (b) Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után. Mi lesz Y generátorfüggvénye? (Írjunk fel rekurziót az első 6-os utáni dobás értéke szerint feltételesen.)

4. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.

   Határozzuk meg X generátorfüggvényét.

Elágazó folyamat

5. Egy vállalkozó üzleteket nyit sorban. Idén nyitotta meg az elsőt, és innentől kezdve minden egyes üzlet minden évben
   - 0,2 valószínűséggel becsődöl, és be kell zárni;
   - 0,4 valószínűséggel nullszaldós lesz, ekkor folytatja a működést a következő évben;
   - 0,4 valószínűséggel akkora hasznot termel, amennyiből meg lehet nyitni még egy üzletet.

   (Úgy tekintjük, hogy minden üzlet teljesítménye a többitől és a saját korábbi teljesítményétől is független.) Modellezzük a feladatot elágazó folyamattal. Írjuk fel az utódeloszlás generátorfüggvényét.

   (a) Számítsuk ki, mennyi az üzletek számának várható értéke 5 év múlva.

   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vállalkozó legfeljebb 2 éven belül becsődöl (azaz bezárja az összes üzletét)?

   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem csődöl be teljesen a vállalkozó?

6. Tegyük fel, hogy egy végtelennek tekinthető számítógép populációban ha egy számítógép megfertőződik egy bizonyos típusú kártékony programmal, akkor a következő 1 nap során p valószínűséggel kiirtják, így nem fertőz meg mást. $(1-p)p$ valószínűséggel nem irtják ki, de nem is fertőz. Továbbá $(1-p)^k p$ valószínűséggel $k-1$ addig nem fertőzött gépet fertőz meg, és nem is irtják ki, ahol $k = 2, 3, 4, \dots$ értékeket veheti fel. Tehát, ha X-szel jelöljük, hogy hány fertőzött géppel járul hozzá a következő napi fertőzött gépek számához egy fertőzés, akkor X eloszlása

$$\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p,\ \ k = 0, 1, 2, \dots.$$

   Tegyük fel, hogy minden megfertőzött számítógép az összes többi fertőzött számítógéptől függetlenül „szaporodik”. Legyen p értéke $\frac{1}{4}$. Modellezzük az egyes napokon a fertőzött számítógépek számát elágazó folyamattal. Tegyük fel, hogy az első napon egy fertőzött gép van. Írjuk fel az utódeloszlás generátorfüggvényét. (Vegyük észre, hogy az utódeloszlás „pesszimista” geometriai eloszlás.)

(a) Számítsuk ki, mennyi a fertőzött számítógépek várható száma 30 nap múlva.

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy 3 nap múlva már nincs fertőzött gép?

(c) Számítógép segítségével számoljuk ki a $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{50}$ valószínűségeket, és ábrázoljuk. ($\pi_n = \mathbf{P}(\mathcal{Z}_n = 0)$)

(d) Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem sikerül kiirtani a kártevőt?

7. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.

   (a) Jelölje X Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg X generátorfüggvényét. Számítsuk ki $\mathbf{E}X$ értékét.

   (b) Mi a valószínűsége, hogy a 2. generációra kihalnak a leszármazottak?

   (c) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

8. Jelölje $\theta(p)$ annak a valószínűségét, hogy soha nem pusztul ki egy olyan elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása geometriai eloszlású p paraméterrel. Rajzoljuk fel a $p \mapsto \theta(p)$ függvény grafikonját.

1. Tétel (Hoeffding-egyenlőtlenség). *Legyen $X_1, \dots, X_n$ független valószínűségi változók. Továbbá létezik, a_k, b_k $k = 1, \dots, n$ úgy, hogy $\mathbf{P}(a_k \le X_k \le b_k) = 1$. Ekkor*

$$\mathbf{P}\left(S_n \ge \mathbf{E}S_n + t\right) \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}\right\}.$$

Hoeffding-egyenlőtlenség, centrális határeloszlás-tétel

9. Egy nagy kiterjedésű országban 400 A típusú és 200 B típusú szélerőművet telepítettek. Az A típusú termelése 0,5 MW és 1,6 MW között ingadozik 1 MW átlagos termeléssel. A B típusú termelése 1,2 MW és 2,8 MW között van, átlagosan 2 MW. Tegyük fel, hogy az erőművek termelése egymástól független.

   (a) Számítsuk ki, hogy mekkora az a kapacitás, amit legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel nem lép túl a 600 erőmű össztermelése.

   (b) Tegyük fel, hogy adott egy névleges kapacitás, $C = 800$ MW. Mekkora valószínűséggel lépi túl C-t az aktuális kapacitás?

   (c) Oldjuk meg az előző feladatot, ha 360 A típusú és 200 B típusú szélerőművet kapcsolnak be. C ugyanaz.

   (d) Tegyük fel, hogy a B típusúak mind be vannak kapcsolva. Ha $C = 800$ MW-ot nem szeretnénk túllépni legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel, akkor hány A típusú erőművet kapcsoljunk be.

10. Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.

   (a) Mekkora napi kapacitású szemétégető üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnek, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.

   (b) Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett 10^{-8}-os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.

11. Egy űrhajóban egy alkatrészre 200 különböző forrásból érkezik terhelés. A várható terhelés összesen 1000 Pa, a terhelés minden egyes forrásból legfeljebb 50 Pa. Mekkora legyen az alkatrész terhelhetősége, ha azt szeretnénk, hogy a túlterhelés esélye legfeljebb 10^{-10} legyen?

Házi feladat: 6., 10.