Konfidencia-intervallumok

Az USA szabvány-ügyi hivatala (National Institute of Standards and Technology) szerint az elektron nyugalmi tömege

$$m_e = \underbrace{9.1093837015 \cdot 10^{-31}}_{M} \pm \underbrace{0.0000000028 \cdot 10^{-31}}_{\Delta} \text{ kilogramm.}$$

$\Delta = 2.8 \cdot 10^{-40}$ kg

K: Hogy kell ezt érteni?

0. válasz: Hát úgy, hogy m_e nem tudjuk, hogy mennyi, de valahol $M-\Delta$ és $M+\Delta$ között van:

$$m_e \in [M-\Delta, M+\Delta].$$

K: Jó, de BIZTOSAN?

1. Válasz: Hát, sajnos nem biztosan, csak elég nagy valószínűséggel — ígazából kb 68% val. séggel:

$$\mathbb{P}(m_e \in [M-\Delta, M+\Delta]) \approx 0.68 = 68\%$$

Ha valakinek a 68% kevés, vegyen nagyobb intervallumot:

$$\mathbb{P}(m_e \in [M-2\Delta, M+2\Delta]) \approx 95\%$$

$$\mathbb{P}(m_e \in [M-3\Delta, M+3\Delta]) \approx 99.7\%$$

K: KOMOLYAN? A tömeg 68% val.séggel $9.1093836987 \cdot 10^{-31}$ és $9.1093837043 \cdot 10^{-31}$ (kg) között van?

Hiszen ez $\boxed{\text{értelmetlen}}$:

- Az m_e tömeg (a használt fizikai modell szerint) egy szám, objektíve létezik, $\boxed{\text{nem}}$ val. változó;
  más kérdés, hogy nem tudjuk, hogy mennyi.
- Az $M-\Delta$, $M+\Delta$ korlátok is számok: nincs bennük semmi véletlen, az előbb írtam le őket a papírra.
- Így az $m_e \in [M-\Delta, M+\Delta]$ állítás vagy igaz, vagy sem, de valószínűsége nincs neki.

Igazi válasz: Az úgy VOLT, hogy

- végeztünk egy csomó ~~kísérletet~~ mérést: n db-ot.
- Mindegyik kísérlet eredménye $\boxed{\text{véletlen}}$ volt: $X_1, X_2, \ldots, X_n$,
  úgy, hogy $\mathbb{E}X_i = m_e$ (a tényleges e.tömeg) minden i-re
- leírtuk az eredményeket: $x_1, x_2 \ldots x_n$
- kiszámoltuk az átlagot: $M := \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ – ez m_e becslése
- Megbecsültük az M szórását: $\Delta \approx \sqrt{\mathrm{Var}\, M}$

pontosabban: $\Delta \approx \sqrt{\mathrm{Var}\, \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}}$

ez egy szám   ez egy val. változó

[Igaziból lehet súlyozott átlag, ha vannak megbízhatóbb és kevésbé megbízható mérések]

- Leírtuk a végeredményt.

P1: Konstruálunk egy mérést, aminek az eredménye véletlen:

$X \sim N(m, \sigma^2)$ ahol ~~m = m_e sajnos ismeretlen~~, de

- $m = m_e$ pont az elektron tömege (de sajnos kg-ban ismeretlen)
- $\sigma = 9 \cdot 10^{-38}$ ismert.

Elvégezzük $n := 100\,000$-szer függetlenül: $X_1, X_2, \dots X_n$

$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n,$

$$M := \frac{S_n}{n}, \quad \Delta := \underset{\text{szórás}}{D}\left(\frac{S_n}{n}\right) \overset{\text{lásd CHT törlönt}}{=\!=} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{9 \cdot 10^{-38}}{100\sqrt{10}}.$$

Így, amíg el nem végeztük a mérést, addig

$\boxed{M \text{ val. változó,}}$ $\mathbb{E}M = m_e$, $DM = \Delta := \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(ebben a legegyszerűbb példában ismert)

$\Rightarrow$ Amíg el nem végeztük a mérést, ADDIG

~~addig~~ $\{M \in [m_e - \Delta, m_e + \Delta]\}$ esemény,

$$\mathbb{P}(M \in [m_e - \Delta, m_e + \Delta]) \overset{M \sim N(m_e, \Delta)}{=\!=} \phi\left(\frac{m_e + \Delta - m_e}{\Delta}\right) - \phi\left(\frac{m_e - \Delta - m_e}{\Delta}\right)$$

$$= \phi(1) - \phi(-1) = 2\phi(1) - 1 \approx 68\%$$

De hát $M \in [m_e-\Delta, m_e+\Delta]$

$$\Updownarrow$$

$$|M-m_e| \leq \Delta$$

$$\Updownarrow$$

$m_e \in [M-\Delta, M+\Delta]$, ez is esemény,

$$\mathbb{P}(\underbrace{m_e}_{\substack{\text{determinisztikus}\\ \text{szám}}} \in \underbrace{[M-\Delta, M+\Delta]}_{\boxed{\text{véletlen intervallum}}}) \approx 68\%$$

Ámde. MIUTÁN elvégeztük a mérés & leírtuk az eredményt, nem lehet tudni, hogy $m_e \in [M-\Delta, M+\Delta]$ teljesül(t)-e.

Igazi válasz még egyszer: $m_e = M \pm \Delta$ azt jelenti, hogy

- okos emberek eltervezték egy mérés-sorozatot, ÉS egy eljárást, hogy hogyan fognak a mérési eredményekből M, Δ számokat kifőzni

  kiértékelési eljárás

- úgy, hogy az $[M-\Delta, M+\Delta]$ intervallum 68% val. séggel tartalmazza m_e-t
- ~~És az jó~~ majd elvégezték a mérést
- Majd kiértékelték
- és az jött ki, hogy $M = 9.1093837015 \cdot 10^{-31}$ kg
  $\Delta = 28 \cdot 10^{-40}$ kg .

Avagy: 68% „bizedalmunk" lehet abban, hogy $m_e \in [M-\Delta, M+\Delta]$

$\downarrow$

bizedalom = $\boxed{\text{confidence}}$

Avagy: Ha holnap Szent Péter leszáll közénk és elárulja az elektron tömegét, akkor két úriember 68 : 32 arányban fogad, hogy benne lesz-e az intervallumban.

Def: ~~De~~ legyen $x_1, x_2 \dots, x_n$ minta az X val.változóból,

θ az X eloszlásának paramétere (mondjuk: várható értéke).

legyen $0 < \varepsilon < 1$ (mondjuk $\varepsilon = 5\%$)

legyen $[a,b]$ az $x_1, x_2 \dots, x_n$ mintából számolt intervallum.

Azt mondjuk, hogy $[a,b]$ konfidencia-intervallum

a θ paraméterhez $1-\varepsilon$ konfidencia-szinten (mondjuk: $1-\varepsilon = 95\%$)

$$\text{ha } \mathbb{P}\big(\theta \in [a,b]\big) = 1-\varepsilon$$

abban az értelemben, hogy ~~a,b~~ az a, b számokat (az $X_1, X_2 \dots X_n$ val.változóból származó) véletlennek tekintjük.

Pl: legyen $X \sim N(m, \sigma^2)$, ahol σ ismert, m ismeretlen.

~~Konstruáljunk 95%-os konfide~~

Mintát veszünk X-ből: $x_1, x_2 \dots, x_n$.

~~Az jött~~ Konkrétan $n = 6$, $\sigma = 2$, ~~a minta~~

a minta: 10.18 ; 12.87 ; 10.55 ; 13.40 ; 12.30 ; 10.76

Konstruáljunk 95%-os konfidencia-intervallumot m-re!

Megoldás: legyen az intervallumunk $[\bar{x}-\Delta, \bar{x}+\Delta]$ ~~a~~ alakú

[Mert a várható érték körüli szimmetrikus intervallumok a legvalószínűbbek]

úgy, hogy $\mathbb{P}(m \in [\bar{x}-\Delta, \bar{x}+\Delta]) = 95\% = 1-\varepsilon \qquad \varepsilon := 0.05$

$$\| $$

$$\mathbb{P}(\bar{x} \in [m-\Delta, m+\Delta])$$

de $\bar{x} \sim N\left(m, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

[Emlékeztető: $\sqrt{n}$ onnan jön, hogy $\operatorname{Var} X_1 = \sigma^2$,

$\operatorname{Var} S_n = \operatorname{Var}(X_1+X_2+\dots+X_n) = n \operatorname{Var} X_1 = n\sigma^2$

$\Rightarrow D S_n = \sqrt{n}\,\sigma$

$\Rightarrow D \frac{S_n}{n} = \frac{D S_n}{n} = \frac{\sqrt{n}\,\sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$]

$$= \mathbb{P}(\bar{x} \in [m-\Delta, m+\Delta]) = \phi\left(\frac{m+\Delta-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \phi\left(\frac{m-\Delta-m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \phi\left(\frac{\sqrt{n}\Delta}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{-\sqrt{n}\Delta}{\sigma}\right) \overset{\phi(-x) = 1-\phi(x)}{=\!=\!=} 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}\Delta}{\sigma}\right) - 1$$

Vagyis Δ legyen a $2\phi\left(\frac{\sqrt{n}\Delta}{\sigma}\right) - 1 = 1-\varepsilon$ egyenlet

megoldása: $\phi\left(\frac{\sqrt{n}\Delta}{\sigma}\right) = 1-\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, \phi^{-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}$

Esetünkben $\sigma = 2$, $\varepsilon = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 0.975$.

A ~~st~~ normális eoszlás táblázatából $\phi(1.96) \approx 0.9750$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96 \quad , n = 6$$

$$\Rightarrow \Delta \approx \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot 1.96 \approx 1.60$$

Az adatokból $\bar{x} \approx 11.68$

$\Rightarrow$ a konfidencia-intervallum $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta] = \underline{\underline{[10.08; 13.28]}} =: I$

<u>Még egyszer:</u>

2 eset lehetséges:

- vagy $m \in I$,
- vagy pechünk <u>volt</u>, és bekövetkezett egy kicsi (5%) val.ségű esemény.