Markov láncok (diszkrét idejű, diszkrét ~~állapot~~ állapotterű)

Legyen $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ diszkrét idő: valamilyen folyamatot csak „egész időegységenként" vizsgálunk.

Legyen S az állapottér: véges, vagy esetleg megszámlálhatóan végtelen (legalábbis a mai órán, meg a tantárgy során végig): a rendszer lehetséges állapotainak halmaza.

Pl: egy üzletember 5 város között ingázik, és mi jegyeztük, hogy merre jár:

$S = \{B, H, K, N, P\} =$ ~~{Hencida,~~

$= \{$Bonchida, Hencida, Kukutyin, Nekeresd, Piripócs$\}$.

Emberünk mindenütt 1 hetet tölt (szombatonként utazik).

Legyen $n = 0, 1, 2, \ldots$-re $X_n \in S$, hogy az n-edik ~~héten~~ héten (mondjuk hétfőn) hol van.

Így az $X_0, X_1, X_2 \ldots$ sorozat mutatja az üzletember útvonalát.

Ha ezek véletlenek, akkor $X_0, X_1, X_2 \ldots$ neve sztochasztikus folyamat.

Def: diszkrét idejű sztochasztikus folyamat S állapottérrel

$\|$

S-értékű valószínűségi változók sorozata

$\|$

véletlen sorozat S-beli elemekkel.

Az elképzelhető legegyszerűbb sztochasztikus folyamat a független, azonos eloszlású val. változók sorozata.

Ezzel szemben a Markov lánc a második legegyszerűbb sztoch. foly., ami elképzelhető.

Def (diszkrét idejű, diszkrét állapotterű Markov lánc)

Legyen S véges vagy megszámlálható halmaz (állapottér).

Az $X_0, X_1, X_2 \ldots$ sztochasztikus folyamat Markov lánc, ha $\forall\, n \in \mathbb{N}_1$-re, $\forall\, x_0, x_1, \ldots x_n \in S$-re és $y \in S$-re

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = y}_{\text{jövő}} \mid \underbrace{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots}_{\text{múlt}} \underbrace{X_n = x_n}_{\text{jelen}}) = \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = y}_{\text{jövő}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{jelen}})$$

Vagyis: ha az n-edik időpont van most (ezen a héten), akkor X_n a jelen állapot, X_{n+1} egy jövőbeli állapot, $X_0, X_1 \ldots, X_{n-1}$ pedig múltbeli állapotok. Ekkor a Markov tulajdonság jelentése:

Ha ismerjük a jelent $\boxed{\text{és}}$ a teljes múltat,
az a jövőre nézve ugyanannyi információt hordoz,
mint ha $\boxed{\text{csak}}$ a jelent ismernénk.

Avagy: Az üzletember útvonala Markov lánc, ha
a következő állomásról ~~an~~ amikor döntést hoz,
- figyelembe veszi, hogy hol van
- és még kockát is dobál,

de nem veszi figyelembe, hogy korábban merre járt.

NYILVÁNVALÓ: Markov láncban $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{jelen}}}{X_n}$ és $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{jövő}}}{X_{n+1}}$ általában NEM független.

FONTOS: általában $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{múlt}}}{X_{n-1}}$ és $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{jövő}}}{X_{n+1}}$ SEM független,

hanem helyette az igaz, hogy

Tétel (Markov lánc ekvivalens definíciója):

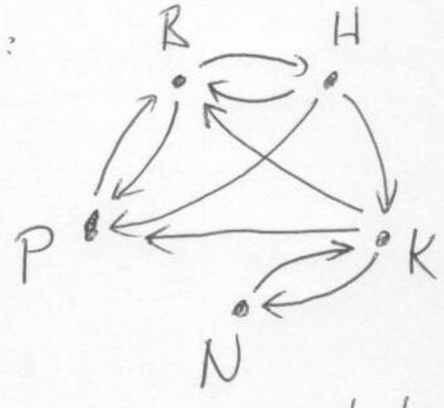
Az $X_0, X_1, X_2 \ldots$ ES sorozat akkor és csak akkor Markov lánc, ha $\forall n<m$-re és $\forall x_0 x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots x_m$-re

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_0=x_0, X_1=x_1, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}}_{\text{múlt}}; \underbrace{X_{n+1}=x_{n+1}, \ldots X_m=x_m}_{\text{jövő}} \mid \underbrace{X_n=x_n}_{\text{jelen}}) =$$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X_0=x_0, \ldots, X_{n-1}=x_{n-1}}_{\text{múlt}} \mid \underbrace{X_n=x_n}_{\text{jelen}}) \cdot \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1}=x_{n+1}, \ldots, X_m=x_m}_{\text{jövő}} \mid \underbrace{X_n=x_n}_{\text{jelen}})$$

Vagyis: múlt és jövő $\boxed{\text{feltételesen}}$ függetlenek, a jelen, mint feltétel mellett.

Pl: Szombatonként az 5 város között az alábbi repülőjáratok járnak:



Tfh üzletemberünk minden szombaton $\boxed{\text{vaktában}}$ választ azon repülők közül, amik onnan indulnak, ahol ő éppen van.

Ekkor az ő $X_0, X_1, \dots$ útvonala Markov lánc.

Fontos: nem gondol arra, hogy előzőleg merre járt.

Def. (Markov átmenet-valószínűségek): $x, y \in S$, $n \in \mathbb{N}$-re

legyen $P_{xy}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x)$

annak a val.sége, hogy y-ba ugrunk, !!feltéve!!, hogy n-kor x-ben vagyunk.

A Markov lánc definíciója szerint

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid \underbrace{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1},}_{\text{nem fontos}} X_n = x) = P_{xy}(n).$$

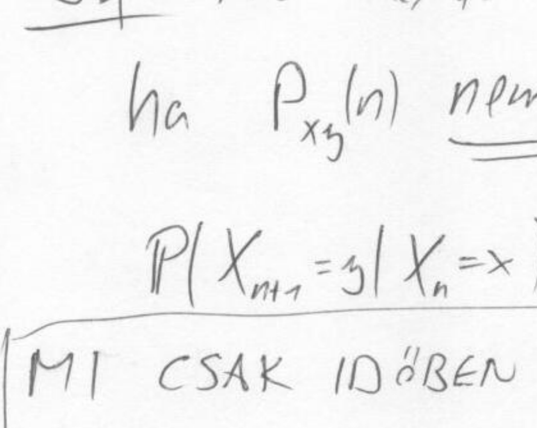
<u>Észrevétel</u>: A Markov lánc definíciója megengedi, hogy $P_{xy}(n)$ függjön <u>n-től</u>: Az üzletember nézheti a naptárat / az óráját, amikor arról dönt, hogy merre utazzon tovább.

<u>Def</u>: Az $X_0, X_1, \ldots$ Markov lánc <u>időben homogén</u>, ha $P_{xy}(n)$ <u>nem függ n-től</u>:

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=y \mid X_n=x) = P_{xy} \quad \text{minden } x,y\in S\text{-re, } \underline{\text{minden } n\text{-re}}$$

MI CSAK IDŐBEN HOMOGÉN MARKOV LÁNCOKKAL FOGLALKOZUNK.

A fenti példában az átmenet-valószínűségek:



x \ y	B	H	K	N	P
B	0	1/2	0	0	1/2
H	1/3	0	1/3	0	1/3
K	1/3	0	0	1/3	1/3
N	0	0	1	0	0
P	1	0	0	0	0

<u>Def</u>: Az így kapott $(P_{xy})_{x,y\in S} = P$ <u>mátrix</u> (esetünkben 5×5-ös) neve <u>Markov átmenetmátrix</u>.

FONTOS: S elemei (a Markov lánc állapotai) általában nem számok, így nincs ~~tom~~ természetes sorrendjük: a P mátrixot sokféleképpen le lehet írni. Hogy ebből ne legyen gond, szokás/célszerű az állapotokat megszámozni, pl.

1: Bonchida
2: Hencida
3: Kukutyin
4: Nekeresd
5: Piripócs,

maradjunk ennél

de ettől még nem lesz sok értelme pl. az $X_0 + X_1 = ?$ összeadásnak. Ráadásul a számozás önkényes, nyugodtan mehetne 0-tól 4-ig is.

Ezen számozás mellett, esetünkben

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tulajdonságok: 1.) $P_{xy} \geq 0$ (hát persze, valószínűségek...)

2.) $\forall x \in S$-re $\sum_{y \in S} P_{xy} = 1$: minden sorösszeg 1 (hát persze, valaminek történni kell).

[Def: Az ilyen mátrix neve sztochasztikus mátrix.]

Intuitíve nyilvánvaló: a P mátrix mindent elmond a Markov láncról, ha tudjuk, hogy honnan indulunk. Ezért

Def: Az $X_n \in S$ Markov lánc kezdeti eloszlás vektora

~~$(\Pi_x(0))_{x \in S}$ vektor, ahol Π~~

a $\Pi(0) = (\Pi_x(0))_{x \in S}$ vektor, ahol $\Pi_x(0) = \mathbb{P}(X_0 = x)$, $x \in S$,

vagyis a kezdeti valószínűségek ~~oszlop~~ $\boxed{\text{sor}}$ vektora.

Pl. ha biztosan tudjuk, hogy emberünk Hencidáról indul,

akkor $\Pi(0) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$,

de ha a ~~kezd~~ kezdeti állapotról érmedobással dönt Benchida és Piripócs között, akkor

$$\Pi(0) = (1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2)$$

maradjunk ennél.

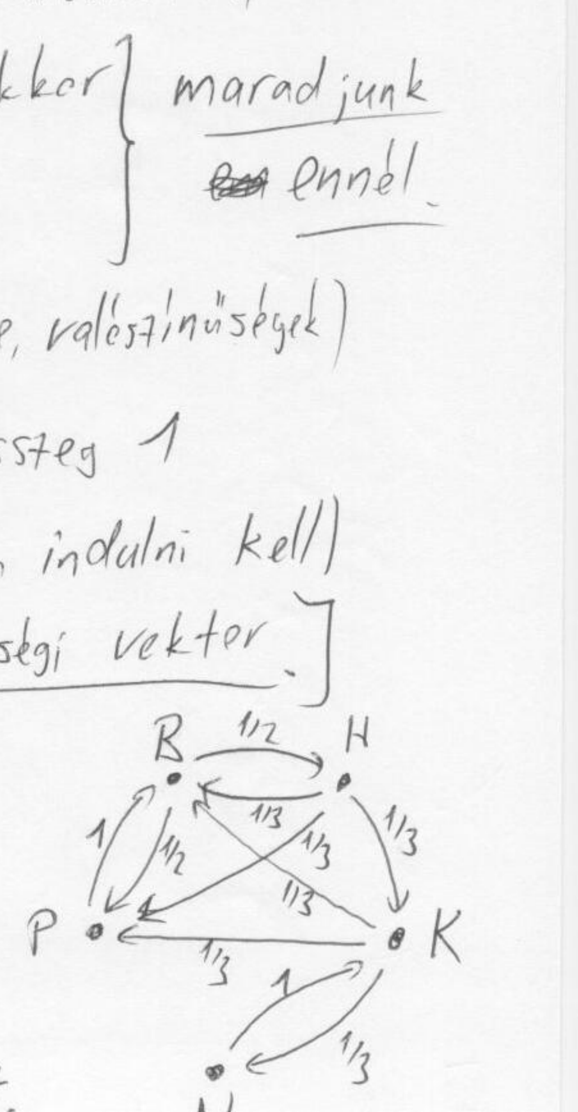
Tulajdonságok: 1.) $\Pi_x(0) \geq 0$ (hát persze, valószínűségek)

2.) $\sum_{x \in S} \Pi_x(0) = 1$: a sorösszeg 1

(hát persze, valahonnan indulni kell)

[Def: Az ilyen vektor neve valószínűségi vektor.]

Def: M.L. Gráf-reprezentációja:



- ~~Ca~~ legyenek az állapotok a csúcsok
- a nem nulla valségű átmenetek az irányított élek
- mindenútra írjuk rá az átmenet-valséget.

Markov trajektóriák valószínűsége

~~Feladat~~ = átmenetmátrix alkalmazása

Nem írok/mondok általános tételeket, csak példákat.

Jelölés: Jelölje $(1\,5\,1\,2\,3\,4)$ azt az eseményt, hogy az $X_0, X_1, X_2 \ldots$ pálya = trajektória eleje $1, 5, 1, 2, 3, 4$, vagyis $\{X_0=1, X_1=5, X_2=1, X_3=2, X_4=3, X_5=4\}$.

„Tétel": $\mathbb{P}(1\,5\,1\,2\,3\,4) = \Pi_1(0)\, P_{15}\, P_{51}\, P_{12}\, P_{23}\, P_{34} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{72}$

induljunk 1-ből

1-ből ugorjunk 5-be

5-ből ugorjunk 1-be

1-ből ugorjunk 2-be

2-ből ~ 3-ba

3-ból ugorjunk 4-be

„Biz": Vigyázat: NEM annyira NYILVÁNVALÓ, mint Móricka gondolná:

1.) Persze: $\mathbb{P}(1) = \Pi_1(0)$, ez volt $\Pi_1(0)$ definíciója ✓

2.) $\mathbb{P}(15) = \mathbb{P}(X_0=1, X_1=5) \xlongequal[\text{val.ség def.}]{\text{feltételes}} \underbrace{\mathbb{P}(X_0=1)}_{\Pi_1(0)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1=5 \mid X_0=1)}_{P_{15}}$ ✓

3.) $\mathbb{P}(151) \xlongequal[\text{val.ség def.-je}]{\text{feltételes}} \underbrace{\mathbb{P}(X_0=1, X_1=5)}_{\substack{\| \\ \Pi_1(0)\,P_{15},\ \text{a} \\ \text{2.) pont miatt}}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_0=1, X_1=5)}_{\| \leftarrow \boxed{\text{MERT MARKOV !!!!!!}}} = \Pi_1(0)\,P_{15}\,P_{51}$ ✓

$\mathbb{P}(X_2=1 \mid \cancel{X_0=1}, X_1=5) = P_{51}$

4.) STB

$\square$

Markov láncok időfejlődése

Kérdés: $\Pi(0)$ és P ismeretében hogyan tudjuk $\mathbb{P}(X_{100}=1)$-et <u>kiszámolni</u>?

Ehhez

<u>Def</u>: Legyen $P(n) = \left(P_{xy}^{(n)}\right)_{x,y\in S}$, ahol $P_{xy}(n) = \mathbb{P}(X_n=y \mid X_0=x)$.

Ekkor a $P_{xy}(n)$-ek az <u>n-lépéses</u> átmenetvalószínűségek,

és $P(n)$ az <u>n-lépéses</u> átmenetmátrix.

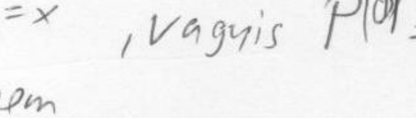
[~~Persz~~ Persze: $P_{xy}(1) = P_{xy}$, vagyis $P(1) = P$

$$P_{xy}(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y=x \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}, \text{ vagyis } P(0) = \mathbb{1} \text{ egységmátrix.}$$]

<u>Def</u>: Legyen $\Pi(n) = (\Pi_x(n))_{x\in S}$, ahol $\Pi_x(n) = \mathbb{P}(X_n = x)$,

ekkor $\Pi(n)$ az <u>n időpont-beli eloszlásvektor</u> (ez is <u>sorvektor</u>).

<u>Tétel</u> (eloszlás időfejlődése): $\Pi(n+1) = \Pi(n)\, P$ mátrix-szorzat



sorvektor = sorvektor · (négyzetes mátrix)

$\Rightarrow$ $\Pi(n)$ úgy fejlődik időben, hogy P-vel szoroztuk $\boxed{\text{JOBBRÓL}}$.

$\boxed{\text{FONTOS}}$ hogy $\Pi(n)$ <u>SOR</u>-vektor, a képletnek csak így van értelme.

<u>Biz:</u> Legyen $A_1=\{X_0=1\}$, $A_2=\{X_0=2\}$, $\dots$, $A_5=\{X_0=5\}$.

Ekkor $A_1, A_2, \dots A_5$ <u>teljes eseményrendszer</u>

[Úgy vettem, hogy $S=\{1,2,3,4,5\}$. Persze lehet nagyobb is.]

Így a <u>teljes valószínűség tétel</u> miatt

$$\mathbb{P}(X_1=y)=\sum_{x\in S} A_x\,\mathbb{P}(X_1=y\mid A_x)=\underbrace{\sum_{x\in S}\pi_x(0)P_{xy}}_{\text{Pont a mátrix-szorzás képlete!}}=(\pi P)_y$$

indulunk valahonnan, onnan elugrunk y-ba

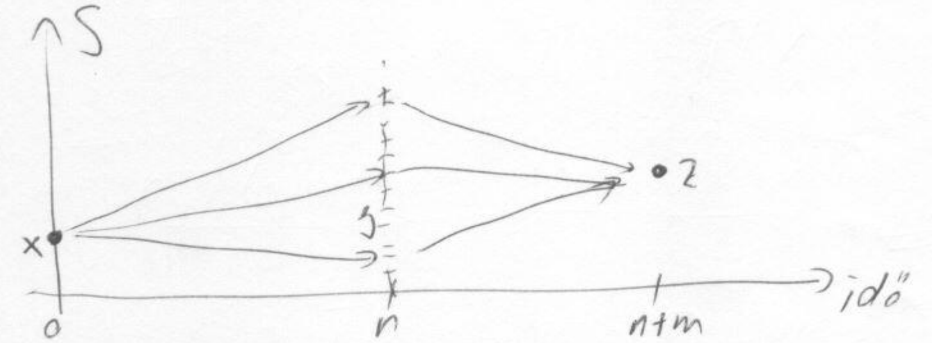
$\square$

<u>Köv.:</u> $\pi(n)=\pi(0)\cdot P^n$ $\quad n=0,1,2,\dots$ $\quad$ ($n=0$-ra is!: $P^0=\mathbb{1}$)

Nagyon hasonlóan a $P(n)$ időfejlődése:

<u>Tétel:</u> $P(n+m)=P(n)P(m)$ $\quad \forall\, n,m=0,1,2,\dots$

<u>Biz:</u>



$P_{xz}(n+m)$ számolásához tegyük fel, hogy $X_0=x$, így

$\mathbb{P}(X_n=y)=P_{xy}(n)$ minden $y\in S$-re

és $\mathbb{P}(X_{n+m}=z)=P_{xz}(n+m)$. A <u>teljes val.ség tétel</u> miatt

$$\mathbb{P}(X_{n+m}=z)=\sum_{y\in S}\mathbb{P}(X_n=y)\,\mathbb{P}(X_{n+m}=z\mid X_n=y)=\sum_{y\in S}P_{xy}(n)P_{yz}(m)$$

n lépésben elugrunk <u>valahová</u>

m lépésben <u>onnan</u> z-be ugrunk

Vagyis

$$P_{xz}(n+m) = \sum_{y\in S} P_{xy}(n)\, P_{yz}(m)$$ megint a mátrix-szorzás:

$$P(n+m) = P(n)\, P(m)$$

$$\square = \square\ \square$$ mind négyzetes mátrixok.

<u>Köv.:</u>
- $P(n+1) = P(n)P \quad \forall n$
- $P(n) = P^n \quad n = 0, 1, 2 \ldots \quad [n=0\text{-ra is: } P^0 = \mathbb{1}]$

[<u>Megj:</u> Persze ezekből az is kijön, hogy

$$\Pi(n+m) = \Pi(n)P(m) = \Pi(n)P^m \quad \forall n, m \geq 0$$]

Ezzel a <u>véges idejű</u> fejlődésről elmondtunk kb mindent, DE az igazán érdekes az lesz, hogy hogyan viselkedik $\Pi(n)$, amint $n \to \infty$.

Pl: $\Pi(0) = \left(\tfrac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2}\right)$, esetén

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi(1) = \Pi(0)P = \left(\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad 0 \quad 0 \quad \tfrac{1}{4}\right)$$

$$\Pi(2) = \Pi(1)P = \left(\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{12} \quad 0 \quad \tfrac{1}{3}\right)$$

Példák diszkrét idejű Markov láncra

(1) ON/OFF folyamat: $S=\{0,1\}$: egy kütyü minden (egész / diszkrét) időpillanatban 2-féle állapotban lehet:

$0 = OFF$, $1 = ON$

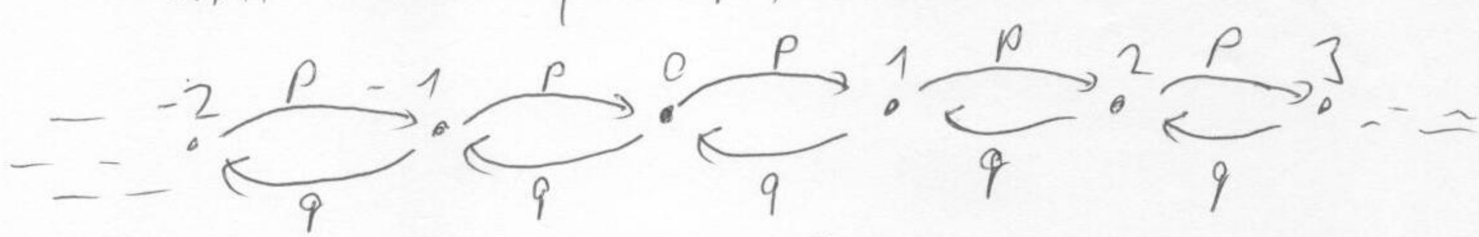
$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ r & 1-r \end{pmatrix}$$ ahol $0\le p,r\le 1$

(2) Egyszerű szimmetrikus bolyongás = simple symmetric random walk $\mathbb{Z}$-n:

$S=\mathbb{Z}$: egy béka ugrál az egész rácson: minden másodpercben vaktában ugrik 1 egységnyit fel vagy le

(3) Egyszerű aszimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n: $S=\mathbb{Z}$,

a bolha nem ugyanolyan szívesen ugrik jobbra, mint balra: $q:=1-p$, $0\le p\le 1$

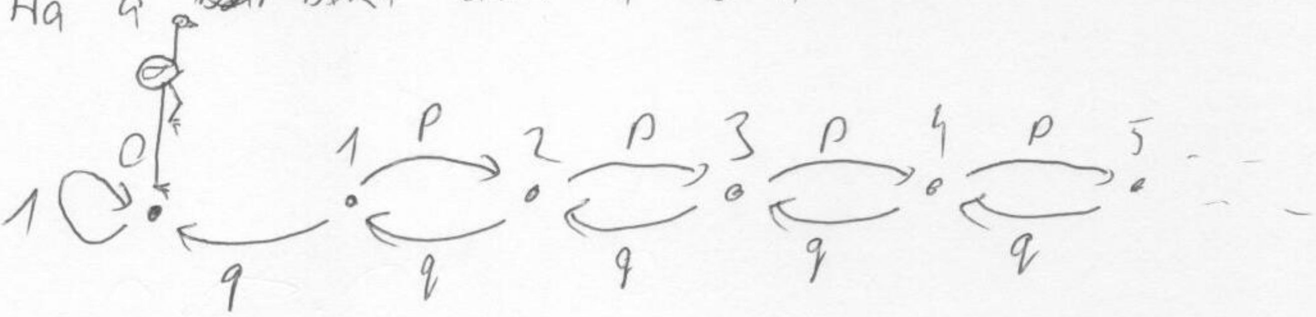


aszimmetrikus, ha $p\neq\frac{1}{2}$

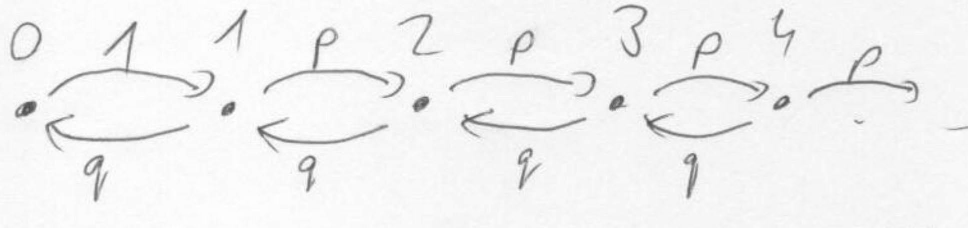
szimmetrikus, ha $p=\frac{1}{2}$

4) Elnyelő bolyongás $\mathbb{N}$-en: $S=\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$

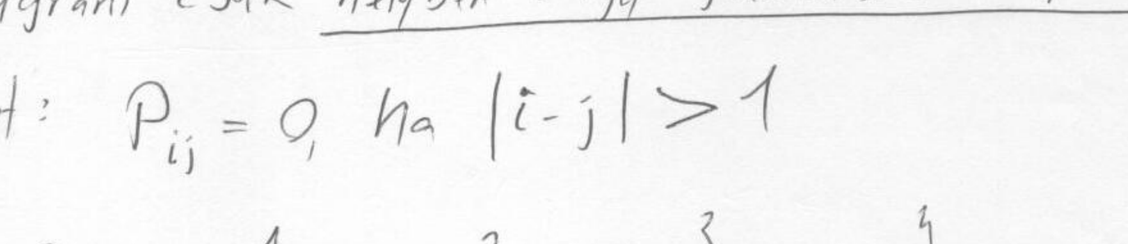
Ha a ~~bolt~~ béka eléri a 0-t, ott marad / beragad:



5) Visszaverő bolyongás $\mathbb{N}$-en: 0-ból csak jobbra lehet ugrani:



6) Def: Az X_n Markov láncot születési-halálozási folyamatnak nevezzük, ha állapottere $S=\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$, vagy esetleg $S=\{0,1,2,\dots,K\}$ (véges halmaz), és ugrani csak helyben vagy szomszédos állapotba lehet: $P_{ij}=0$, ha $|i-j|>1$



Ilyenkor X_n értelmezése többnyire darabszám, ami egy lépésben legfeljebb 1-gyel változhat.

② dik példa: i.i.d sorozat: hamis kockával dobálunk, ahol

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}$(k-t dobunk)	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/10$	$1/2$

$X_n :=$ az n-edik dobás eredménye. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ekkor $\pi(0) = \left(\frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{2}\right)$

$$P = \begin{pmatrix} 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/2 \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/10 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Nem meglepő, de érdekes: ezek a példák nagyon különböző / sokféle hosszú távú viselkedést mutathatnak.