1. Valószínűségszámítás alapok

1.1. Eseménytér, esemény, valószínűség

Adott egy kísérlet, aminek az eredménye véletlen. Pl.: Eldobunk egy dobókockát és feljegyezzük, hogy hánya(s)t dobtunk.

Fogalmak:

- Eseménytér: A kísérlet összes lehetséges kimenetelének halmaza. Esetünkben $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Elemi események: a kísérlet lehetséges kimenetelei - pl. „1” vagy „5”.
- Esemény: az eseménytér részhalmaza: Pl. $A := \{1, 3, 5\} \subset \Omega$ vagy $B := \{5, 6\} \subset \Omega$.

  Az *események* azok,

  – amik tudnak bekövetkezni vagy be nem következni: pl. ha a kísérlet eredménye „3”, akkor az A esemény bekövetkezett, a B pedig nem.

  – amiknek van valószínűsége. Pl. ha a kocka szabályos, akkor $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

- Valószínűség: eseményeknek van, mindig egy 0 és 1 közötti szám – egy A esemény valószínűsége $\mathbb{P}(A)$. Más szóval a valószínűség egy $\mathbb{P} : \{\text{események}\} \to [0, 1]$ függvény.

  Megjegyzés: Kis pongyolasággal ugyanígy jelöljük ez elemi események valószínűségét, pl. „1” egy elemi esemény, $\{1\}$ egy (egy-elemű) esemény és $\mathbb{P}(1) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6}$.

Példák:

- $\emptyset = \{\}$ a *lehetetlen esemény*, persze $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a *biztos esemény*, persze $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- A és B esemény *kizáró*, ha $A \cap B = \emptyset$, vagyis egyszerre legfeljebb az egyik következhet be. Ilyenkor persze $\mathbb{P}(A \text{ vagy } B) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Amikor egy kísérletnél megmondjuk az események valószínűségét, **matematikai modellt** alkotunk a kísérletre.

Egy kézenfekvő modell: legyen minden elemi esemény valószínűsége azonos – esetünkben $\frac{1}{6}$, így minden A eseményre

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ennek a modellnek a neve *klasszikus valószínűségi mező*. Esetünkben jó lesz a modell, ha a kocka szabályos, de ha nem, akkor nem.

További példák:

1. Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg ki nem jön a 6-os, és addig is feljegyezzük a dobásokat. Ekkor lehetséges elemi események pl. „6”, „1116”, vagy „111111. . . ” (csupa 1-es az idők végezetéig). Ezek valószínűsége nyilván nem egyforma, hanem $\mathbb{P}(6) = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(1116) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^4}$, illetve $\mathbb{P}(11111\ldots) = 0$. Ez utóbbi esemény nem lehetetlen, csak a valószínűsége nulla. Mivel végtelen sok elemi esemény van, a klasszikus valószínűségi mező eleve szóba sem jöhet.

2. Egy szabályos dobókockát eldobunk kétszer egymás után (mindkettő előtt jól megrázzuk egy pohárban), és feljegyezzük az eredményeket. Az eseménytér

$$\begin{aligned}\Omega = \{&11, 12, 13, 14, 15, 16,\\ &21, 22, 23, 24, 25, 26,\\ &31, 32, 33, 34, 35, 36,\\ &41, 42, 43, 44, 45, 46,\\ &51, 52, 53, 54, 55, 56,\\ &61, 62, 63, 64, 65, 66\}\end{aligned}$$

Kézenfekvő a klasszikus valószínűségi mező használata, pl. $\mathbb{P}(11) = \mathbb{P}(12) = \mathbb{P}(21) = \frac{1}{36}$.

1.2. Példabeszéd a matematikai ill. fizikai modellezésről

Nézzünk még két példát:

1. Van két szabályos dobókockánk: egy piros és egy kék. Eldobjuk őket *egyszerre*, és feljegyezzük a dobott számokat – először a piros, aztán a kék kockán lévőt. Az eseménytér nyilván ugyanaz, mint az előbb (amikor egy kockát dobtunk el kétszer), és a klasszikus valószínűségi mező jogosságát se nagyon kérdőjelezné meg senki.

2. Van két **egyforma** szabályos dobókockánk, eldobjuk őket **egyszerre**, és feljegyezzük az eredményt. Ha a két – amúgy egyforma – kockán más-más szám jön ki, akkor döntenünk kell, hogy melyiket írjuk előre: legyen mondjuk úgy, hogy a nagyobbikat. Így az eseménytér ezúttal

$$\begin{aligned}\Omega = \{&11,\\ &21, 22,\\ &31, 32, 33,\\ &41, 42, 43, 44,\\ &51, 52, 53, 54, 55,\\ &61, 62, 63, 64, 65, 66\}\end{aligned}$$

Kérdés: Mennyi most az 11, és mennyi a 21 kimenetel valószínűsége?

- Móricka szerint valószínűség $= \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}}$, ezért $\mathbb{P}(11) = \mathbb{P}(21) = \frac{1}{21}$.
- Pistike szerint ez nem jó, hiszen a 21 az „igazából” két eset: lehet 12 vagy 21 attól függően, hogy melyik kockán jött ki az 1-es. Így „igazából” 36 eset van, ezért $\mathbb{P}(11) = \frac{1}{36}$ és $\mathbb{P}(21) = \frac{2}{36}$.
- Móricka szerint ez nevetséges: a két kocka *egyforma*, így nincs értelme arról beszélni, hogy az „elsőn” 1-es jött ki a „másodikon” meg 2-es, vagy fordítva. A fiktív „12” és „21” esetek igazból egyetlen eset, semmi okunk rá, hogy dupla súllyal számoljuk.
- Pistike szerint nyilvánvaló, hogy ha a kockákat megjelölnénk (pl. az egyikre egy pici piros, a másikra meg egy pici kék pöttyöt festenénk), attól a valószínűségek semmit sem változnának, így az előző modell, a piros és kék kockával, helyesen írja le a kísérletet.
- Mivel Móricka és Pistike is matematikus, ezen elvitatkozhatnak akármeddig.

FONTOS: Móricka és Pistike vitájában igazságot tenni **nem a matematikusok feladata**. Mindkét matematikai modell egyaránt korrekt: a kérdés az, hogy melyik írja le helyesen a valóságot. Ezt pedig nem matematikai, hanem **fizikai** kérdés, és csak **kísérlettel** lehet eldönteni.

MEGLEPŐ: a kérdés nehezebb, mint gondolnánk. Pistike kaján vigyorral szemléli Móricka erőlködését, hogy elkészítsen két **egyforma** dobókockát. Persze: nem is kell pöttyöt festeni rájuk, elég alaposan megnézni egy jó nagyítóval vagy mikroszkóppal, hogy találjunk valami karcolást, ami alapján megkülönböztethetők. És valóban: a valódi kockákkal elvégzett kísérletek Pistikét igazolják. ÁMDE ha a kísérletben nem dobókockák szerepelnének, hanem mondjuk ^4He atommagok, akkor varázsütésre Móricka modellje bizonyulva helyesnek: azok ugyanis *tényleg egyformák*. Így az, hogy a kockákat Pistike modellje írja le helyesen, pusztán annak a fizikai ténynek a tükröződése, hogy *egyforma dobókockák márpedig nincsenek*, legfeljebb olyanok, amiket mi megkülönböztetni nem tudunk (vagy nem vesszük a fáradságot).

1.3. Valószínűségi változók, valószínűség-eloszlások

Elvégzünk egy kísérletet, aminek a kimenetele véletlen, majd az eredmény alapján legyártunk egy *számot*. Az így kapott véletlen szám neve *valószínűségi változó*.

Példa: Eldobunk két szabályos dobókockát (egy pirosat és egy kéket), és X-szel jelöljük a dobott számok összegét.

Az eseménytér

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 11, 12, 13, 14, 15, 16, \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26, \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36, \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46, \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56, \\ 61, 62, 63, 64, 65, 66 \end{Bmatrix},$$

a valószínűségi változó egy $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvény, esetünkben $X(ab) := a + b$. Pl. $X(11) = 2$, $X(34) = 7$.

FONTOS:

- Ha X val.változó, akkor pl. $\{X = 4\}$ egy *esemény*: tud bekövetkezni vagy nem bekövetkezni, és van neki valószínűsége. Esetünkben pl. $\{X = 4\} = \{13, 22, 31\}$, és $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{3}{36}$. Hasonlóan, ha x egy szám, akkor $\{X = x\}$ egy esemény és $\mathbb{P}(X = x)$ ennek a valószínűsége.
- Maga X viszont *nem esemény*, és *nincs neki valószínűsége*: senki se írjon le olyat, hogy $\mathbb{P}(X)$, mert ez értelmetlen.

Ha az X val.változót jellemezni akarjuk, akkor az az érdekes kérdés, hogy

- mik a lehetséges értékei: esetünkben 2, 3, 4, 5, ...,12
- ezeket ekkora valószínűséggel veszi fel. Esetünkben $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{36}$, ..., $\mathbb{P}(X = 12) = \frac{1}{36}$. Táblázatban:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

1. Definíció. *Egy valószínűségi változó* diszkrét*, ha csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.*

Egy diszkrét valószínűségi változó *eloszlásának* nevezzük azt az információt, hogy milyen értékeket vehet fel (mondjuk $x_1, x_2, \dots$) és mekkora valószínűséggel (mondjuk $p_1, p_2, \dots$). A fenti táblázat egy *diszkrét valószínűségeloszlást* tartalmaz. Ez az eloszlás távolról sem egyenletes: ebben a kísérletben sokkal könnyebb 7-et kapni, mint 2-t. (Megj.: Ez a tény a „Catan telepesei" nevű társasjátékban fontos.)

Tulajdonságok: Ha $x_1, x_2, \dots$ és $p_1, p_2, \dots$ egy diszkrét valószínűségeloszlást ad meg, akkor

- $p_k \geq 0$ minden k-ra
- $\sum_k p_k = 1$.

MÉG EGYSZER:

- Egy *esemény* legfontosabb jellemzője a *valószínűsége*,
- egy *valószínűségi változó* legfontosabb jellemzője az *eloszlása.*
- Eseménynek nincs eloszlása, val.változónak nincs valószínűsége.

1.4. Várható érték, szórásnégyzet, szórás

2. Definíció. *Ha az X valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1, x_2, x_3, \dots$ és ezek valószínűségei rendre $p_1, p_2, p_3, \dots$ (vagyis $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$ minden k-ra), akkor X várható értéke*

$$\mathbb{E}X := \sum_k x_k p_k = \sum_k x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

A fenti példában

$$\mathbb{E}X = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \dots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \dots = \frac{252}{36} = 7.$$

1. Megjegyzés.

- *Ha végtelen sok lehetséges érték van, vagyis a k szerinti összegzés egy végtelen összeg, akkor előfordulhat, hogy a végtelen összeg nem létezik, így a várható érték sem létezik. Ám ha pl. minden $x_k \geq 0$, akkor a legrosszabb, ami történhet, hogy $\mathbb{E}X = \infty$.*
- *Az $\mathbb{E}X$ várható érték jelentése* súlyozott átlag*: az X lehetséges értékeiből számolunk átlagot a* valószínűségekkel súlyozva *– így persze a súlyok összege 1:*

$$\mathbb{E}X = \sum_k x_k p_k = \frac{\sum_k x_k p_k}{1} = \frac{\sum_k x_k p_k}{\sum_k p_k}$$

- *Jó észben tartani, hogy a várható érték igazából nem a val.változó, hanem az* eloszlás *tulajdonsága: ha az X és Y val.változók eloszlása azonos, akkor $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y$.*

Elemi tulajdonságok:

- Ha X val.változó és $c \in R$ konstans, akkor persze $c + X$ is val.változó, és $\mathbb{E}c + X = c + \mathbb{E}X$.
- Ha X val.változó és $c \in R$ konstans, akkor persze cX is val.változó, és $\mathbb{E}c + X = c\mathbb{E}X$.
- Ha X és Y val-változók *ugyanazon az Ω valószínűségi mezőn*, akkor $X + Y$ is valószínűségi változó, és $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ (amennyiben a jobboldal létezik).
- Általában *nem igaz*, hogy $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ lenne.

Hasznos tény a várható értékek számolásához:
Ha X lehetséges értékei $x_1, x_2, \ldots$ és ezek valószínűségei $p_1, p_2, \ldots$, akkor

- nem csak az igaz, hogy $\mathbb{E}X = \sum_k x_k p_k$,
- hanem pl. az is, hogy $\mathbb{E}(X^2) = \sum_k x_k^2 p_k$,
- vagy akár $\mathbb{E}\sin(X) = \sum_k \sin(x_k) p_k$,
- sőt általában $\mathbb{E}g(x) = \sum_k g(x_k) p_k$ ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény.

Ez azért hasznos, mert pl. $\mathbb{E}(X^2)$ kiszámolásához nem kell meghatározni X^2 eloszlását.

Ha egy kísérletet sokszor elvégzünk (függetlenül, lásd lentebb), és így egy X val.változóból „mintát veszünk", a kapott értékek a várható érték körül fognak szóródni. Hogy mégis mennyire térnek el a várható értéktől *átlagosan*, arról szól az Xval-változó *szórása*. Ennek definiálására nézzünk először néhány rossz ötletet:

1. Legyen $m := \mathbb{E}X$ a várható érték. Így az X eltérése a várható értéktől $X - m$ (ami persze véletlen), ennek várható értéke $\mathbb{E}(X - m)$. Sajnos ez nem hasznos: $\mathbb{E}(X - m) = \mathbb{E}X - m = m - m = 0$, nem hordoz információt. Hát persze: $X - m$ az *előjeles* eltérés, hol negatív, hol pozitív, átlagosan nulla.
2. Természetes lenne hát az $|X - m|$ *abszolút eltérés* átlagát, $\mathbb{E}|X - m|$-et szórásnak nevezni. NEM így tesszük, elsősorban a számolások kényelmessége érdekében (lásd lentebb), és az $x \to |x|$ függvény kellemetlen volta miatt (a 0-ban nem differenciálható).
3. Ezért hát nézzük az $(X - m)^2$ *négyzetes eltérést*: ez mindig nemnegatív, így a várható értéke informatív az m-től való eltérések nagyságrendjére vonatkozóan. Sajnos a dimenziója nem stimmel: ha pl. X-et és m-et *másodpercben* mérjük, akkor $(X - m)^2$ mértékegysége *négyzetmásopderc* (s^2), amit nincs értelem pl. m-hez hasonlítani.

Mindezek alapján a jól bevált definíció:

3. Definíció. *Az X valószínűségi változó* szórásnégyzete *avagy* varianciája

$$\mathbb{V}arX = D^2X = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$$

(ha létezik), szórása pedig

$$DX := \sqrt{D^2X} = \sqrt{\mathbb{V}arX}.$$

Könnyű és hasznos tulajdonság:

$$\mathbb{V}arX = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2.$$

Ezek alapján – némi számolással – a fenti példára (ahol X a dobott számok összege két szabályos kockán)

$$\mathbb{V}arX = \frac{35}{6} \quad , \quad DX = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.42$$

1.5. Feltételes valószínűség, függetlenség

1.5.1. Feltételes valószínűség

Legyen Ω eseménytér, $A, B \subset \Omega$ események, és legyen $\mathbb{P}(A) > 0$. Ha tudom, hogy A bekövetkezett,és *ennek tudatában* szeretnék tippelni B bekövetkezésére, akkor nem a B esemény valószínűsége az érdekes számomra, hanem a *feltételes valószínűsége* az A feltétel mellett. Számomra már az A játssza a teljes eseménytér szerepét, és a kísérletnek csak az A-beli kimenetelei érdekelnek: azon belül is az, hogy ezen kimenetelek mekkora hányada van benne B-ben **is**.

Példa: egy évfolyamba 130 hallgató jár. Ebből 90 rövid hajú fiú, 15 hosszú hajú fiú, 6 rövid hajú lány és 19 hosszú hajú lány. Kiválasztunk egy hallgatót véletlenszerűen, lemérjük a haját és hosszúnak bizonyul. Mennyi *ezek után* annak a valószínűsége, hogy az illető lány?

Jelölések eseményekre

- A: a kiválasztott hallgató hosszú hajú
- B: a kiválasztott hallgató lány

Nyilván $\mathbb{P}(A) = \frac{15+19}{130} = \frac{34}{130} \approx 0.26$ és $\mathbb{P}(B) = \frac{6+19}{130} = \frac{25}{130} \approx 0.19$, de egyik sem a számunkra érdekes mennyiség: mivel tudjuk, hogy az illető hosszú hajú, ezért csak $15 + 19 = 34$ hallgató jön szóba: közülük 19, vagyis $\frac{19}{34} \approx 0.56 = 56\%$ lány, így ezt kerestük. Ez alapján

4. Definíció. *Legyen Ω eseménytér, $A, B \subset \Omega$ események, és legyen $\mathbb{P}(A) > 0$. Ekkor a B esemény* feltételes valószínűsége *A mint feltétel mellett*

$$\mathbb{P}(B|A) := \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}.$$

1.5.2. Események függetlensége

Az $A, B \subset \Omega$ események *statisztikus függetlenségén* azt értjük, hogy A bekövetkeztéből vagy be nem következtéből semmilyen módon nem tudunk tippelni B bekövetkeztére, és viszont. FIGYELEM: ez a tulajdonság *erősebb*, mint a logikai függetlenség: az előző példában A és B logikailag független, hiszen ha valaki hosszú hajú, attól még lehet fiú is és lány is – illetve ha rövid hajú,akkor is. Ugyanígy: ha valaki fiú, attól még lehet rövid vagy hosszú hajú – és ha lány, akkor is. Persze ugyanez az A és B távolról sem független *statisztikailag*: a teljes hallgatóságnak mindössze 19%-a lány, míg a hosszú hajúaknak 56%-a, így ha valakiről tudom, hogy hosszú hajú, az nagyon is hordoz információt a nemére vonatkozóan: jobban tudok tippelni, mintha nem tudnám a haja hosszát.

Ebben a tantárgyban események függetlenségén mindig *statisztikus függetlenséget* értünk.

A fenti meggondolás alapján az a definíció adódik, hogy A és B független, ha $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, illetve $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Szerencsére, ha $\mathbb{P}(A) > 0$ és $\mathbb{P}(B) > 0$, akkor mindkettő ugyanazt jelenti:

$$\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B) \quad \text{illetve} \quad \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Ám ha $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}(B) = 0$, akkor legalább az egyik értelmetlen. Ez motiválja az alábbi definíciót:

5. Definíció. *Az $A, B \subset \Omega$ események* függetlenek*, ha $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.*

Példa: Dobunk egy szabályos dobókockával: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Legyen

- $A = \{\text{a dobott szám páros}\} = \{2, 4, 6\}$
- $B = \{\text{a dobott szám 3-nál nagyobb}\} = \{4, 5, 6\}$
- $C = \{\text{a dobott szám 4-nél nagyobb}\} = \{5, 6\}$.

Ekkor A és B nem független, mert

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(\{4, 6\}) = \frac{2}{6} \neq \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

viszont A és C független, mert

$$\mathbb{P}(AC) = \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C).$$

2. Megjegyzés. *Az $\emptyset$ (lehetetlen esemény) és az Ω (biztos esemény) minden eseménytől függetlenek, még önmaguktól is.*

1.5.3. Valószínűségi változók függetlensége

Egy X és Y valószínűségi változót akkor nevezzük függetlennek, ha az egyik értékének ismeretéből semmilyen módon nem lehet következtetni a másikra, és viszont. Ez lefordítható a val.változók által meghatározott események függetlenségére. Most csak *diszkrét* val.változók esetére írom ki: ha $a, b \in \mathbb{R}$ és tudom, hogy $X = a$, akkor ez semmit se mondjon arról, hogy vajon $Y = b$ igaz-e vagy sem. Vagyis

6. Definíció. *Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn. X és Y* független*, ha bármely $a, b \in \mathbb{R}$-re az $\{X = a\}$ és $\{Y = b\}$ események függetlenek.*

Általános (nem feltétlenül diszkrét) val.változók függetlensége nagyon hasonlóan definiálható.
A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGETLENSÉGE MEGHATÁROZÓ FOGALOM A FÉLÉV SORÁN.

1.5.4. Függetlenség és várható érték

Mint említettük, általában $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Hogy mennyire nem, azt méri az X és Y *kovarianciája*:

7. Definíció. *Ha X és Y valószínűségi változók ugyanazon valószínűségi mezőn, akkor a* kovarianciájuk

$$Cov(X, Y) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right],$$

vagy, ami ezzel ekvivalens,

$$Cov(X, Y) := \mathbb{E}(XY) - expectX\mathbb{E}Y$$

(amennyiben a jobb oldal létezik). X és Y korrelálatlan*, ha $Cov(X, Y) = 0$.*

Többek között ebben van nagy jelentősége a val.változók függetlenségének. Alapvető fontosságúak a következő állítások:

1. Tétel. *Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y,$$

avagy X és Y korrelálatlan, továbbá

$$\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}arX + \mathbb{V}arY$$

(amennyiben a jobb oldal létezik).

3. Megjegyzés. *NAGYON FONTOS, hogy a fenti tétel értelmében független val.változók* ***szórásnégyzete*** *adódik össze, és nem pedig a szórása.*

4. Megjegyzés. *A tétel megfordítása távolról sem igaz: a korrelálatlanságból* nem *következik a függetlenség. Pl: kétszer dobunk egy szabályos kockával. Legyen X a dobott számok összege, Y pedig az (előjeles) különbsége. Házi feladat ellenőrizni, hogy X és Y korrelálatlan, de nem független.*

Példa: Kétszer dobunk egy szabályos kockával. Legyen U az első dobás eredménye, V a második dobás eredménye, és legyen $X = U + V$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}U &= \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2} = 3.5\\
\mathbb{E}(U^2) &= \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}\\
\mathbb{V}arU &= \mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}U)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}\\
\mathbb{V}arV &= \frac{35}{12} \text{ ugyanígy}\\
\mathbb{V}arX &= \mathbb{V}ar(U+V) = \mathbb{V}arU + \mathbb{V}arV = 2\cdot\frac{35}{12} = \frac{35}{6}, \text{ mert } U \text{ és } V \text{ független.}
\end{aligned}$$

Ez a számolás lényegesen könnyebb, mint amikor nemrég kiszámoltuk X szórását közvetlenül az eloszlásából.

1.6. Bernoulli eloszlás

Ez az egyik legyegyszerűbb valószínűség-eloszlás. Persze vannak nála egyszerűbbek is:

- Ha $X \equiv 0$, vagyis X mindig a 0 értéket veszi fel (ettől még ő egy rendes valószínűségi változó), akkor $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 0$ így $\mathbb{V}arX = 0$ és $DX = 0$.
- Ha $X \equiv 1$, vagyis X mindig az 1 értéket veszi fel (ettől még ő egy rendes valószínűségi változó), akkor $\mathbb{E}X = 1$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$ így $\mathbb{V}arX = 0$ és $DX = 0$.

A Bernoulli eloszlás viszont a legegyszerűbb – és egyben egyik legfontosabb nem-triviális valószínűség-eloszlás:

Legyen $p \in [0,1]$ paraméter és legyen $q = 1 - p$. Dobjunk fel egy hamis érmét, amin a Fej valószínűsége p (és persze az Írás valószínűsége q). Ez után legyen

$$X := \begin{cases} 0, & \text{ha az eredmény írás}\\ 1, & \text{ha az eredmény fej}\end{cases}.$$

Ekkor persze X eloszlása:

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	q	p

8. Definíció. *Ezt az eloszlást p paraméterű Bernoulli eloszlásnak nevezzük: $X \sim B(p)$.*

Érdekesség: $X \in \{0, 1\}$, így $X^2 = X$.
Könnyű számolás: $\mathbb{E}X = p$, $\mathbb{E}X^2 = p$, így

$$\mathbb{V}arX = p - p^2 = p(1-p) = pq \quad , \quad DX = \sqrt{pq}.$$

A fenti két triviális eloszlás a $B(p)$ speciális esete $p = 0$ illetve $p = 1$ választással.
A kurzusban szereplő *minden* nevezetes diszkrét eloszlásnak a Bernoulli lesz az alap építőköve.