Becslések, határeloszlás tételek

Székely Balázs

2011. november 9.

Példa

Interneten keresztül történő videó szolgáltatás esetén a felajánlott videók bitrátája 2,6 és 3 Mbps között változik (VBR kódolást használtak minden esetben) átlagosan 2,8 Mbps. Ha csúcsidőben egy bizonyos szervernél 1000 igényre számítanak, akkor mekkorára kell tervezni a sávszélességet, hogy egy másodperc alatt legfeljebb 10^{-6} valószínűséggel ne tudjon minden igénynek eleget tenni.

Elvileg $1000 \times 3 = 3000$ Mbps kapacitásra lenne szükség a legrosszabb esetben.
A minimálisan szükséges sávszélesség az aktuális aggregált sávszélesség igény várható értéke!
Miért?

CHT – centrális határeloszlás-tétel

Tétel

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók úgy, hogy $m = \mathbf{E}X_1$ és $\sigma = D(X_1)$ létezik és véges. Ekkor ha $n \to \infty$, akkor

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \Phi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.

Ha n nagy, akkor ez alkalmas lehet a baloldalon álló valószínűség közelítésére, azaz, ha n nagy, akkor tekintsük úgy, hogy

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \approx \Phi(x).$$

Használjuk ezt a példa megoldására. Természetesen meg kell majd vizsgálni, hogy a közelítéssel mekkora hibát vétünk.

CHT alkalmazása a példára

Alsó korlát a sávszélességre

A minimálisan szükséges sávszélesség az aktuális aggregált sávszélesség igény várható értéke!
Miért?
Tegyük fel, hogy a videók bitrátájának várható értéke m, szórása σ.
Legyen X_i az i-dik videó aktuális bitrátája. És tetszőleges n-re legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Legyen a kapacitás az aktuális összesített sávszélesség várható értéke $C = \mathbf{E}S_{1000}$. Megmutatjuk, hogy ezen kapacitás mellett ha n nagy, akkor közelítőleg $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem lesz elég a kapacitás, azaz $\mathbf{P}(S_{1000} > \mathbf{E}S_{1000}) \approx \frac{1}{2}$.

Ennek módszerét a következő fólián nézzük meg, amin kiszámoljuk a minimális szükséges sávszélességet. Ezután foglalkozunk a $\mathbf{P}(S_{1000} > \mathbf{E}S_{1000}) \approx \frac{1}{2}$ közelítéssel.

CHT alkalmazása a példára

Minimálisan szükséges sávszélesség

Tegyük fel, hogy a videók aktuális bitrátája egyenletes eloszlású a $[2,6\,,3]$ között. Ekkor a szórás $\frac{3-2{,}6}{\sqrt{12}} = \frac{2}{5\sqrt{12}}$.

Ha $x > 2800$, akkor $\mathbf{P}\left(S_{1000} > x\right) = ...$(CHT használata)

A CHT állításában szereplő hányadost szeretnénk látni. Alakítsuk úgy a baloldalon a valváltozót, hogy ez megjelenjen, miközben az esemény nem változik, azaz a jobboldalon is ugyanazokat a műveletek hajtjuk végre.

$$\cdots = \mathbf{P}\left(S_{1000} - 1000 \cdot 2,8 > x - 2800\right) =$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_{1000}-1000{\cdot}2{,}8}{\sqrt{1000}\frac{2}{5\sqrt{12}}} > \frac{x-2800}{\sqrt{1000}\frac{5}{2\sqrt{12}}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x-2800}{\sqrt{1000}\frac{2}{5\sqrt{12}}}\right) = 10^{-8}$$

Azaz $\Phi\left(\frac{x-2800}{\sqrt{1000}\frac{2}{5\sqrt{12}}}\right) = 1 - 10^{-6}$

A standard normális eloszlás táblázatából: $\Phi(4,7) = 1 - 10^{-6}$.

$$\frac{x - 2800}{\sqrt{1000}\frac{2}{5\sqrt{12}}} = 4,7 \;\Rightarrow\; x = 2821,45 \approx 2822.$$

Ez az elengedhetetlenül szükséges 2800-nak a 0,77%-a.

CHT alkalmazása a példára

Alsó korlát a sávszélességre. FOLYTATÁS!

A minimálisan szükséges sávszélesség az aktuális aggregált sávszélesség igény várható értéke!
Miért?
Azt fogjuk látni, hogy ha n nagy, akkor $\mathbf{P}(S_n > \mathbf{E}S_n) \approx \frac{1}{2}$.
Az előző fólián bemutatott módszerrel csináljuk. $\mathbf{E}S_n = nm$,
ekkor $\mathbf{P}(S_n > \mathbf{E}S_n) = \mathbf{P}(S_n - nm > nm - nm) =$
$\mathbf{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} > \frac{0}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < \frac{0}{\sqrt{n}\sigma}\right) \underset{CHT}{\approx} 1 - \Phi(0)$.
Mivel $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, a jobboldalon álló valószínűség $\frac{1}{2}$.

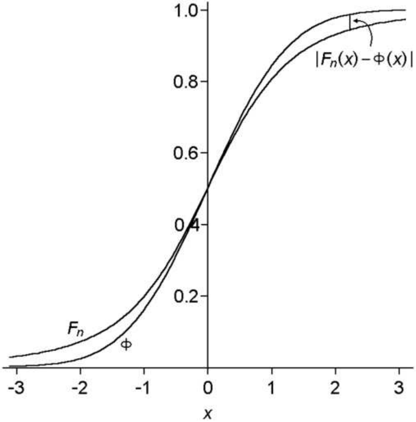
CHT közelítés hibája fix n-re

Berry-Esséen tétel

Ha $\mathbf{E}X_i = 0$, $D^2(X_i) = \sigma^2 < \infty$, és $\mathbf{E}|X_i|^3 = \varrho < \infty$, akkor létezik egy $C > 0$ (abszolut konstans) úgy, hogy

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{C\varrho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Megjegyzés: Előfordulhat, hogy egy konkrét x_0-ra a hiba sokkal kisebb.



CHT konvergencia gyorsasága, közelítés fix n-re

Berry-Esséen tétel

Ha $\mathbf{E}X_i = 0$, $D^2(X_i) = \sigma^2 < \infty$, és $\mathbf{E}|X_i|^3 = \varrho < \infty$, akkor létezik egy $C > 0$ (abszolut konstans) úgy, hogy

$$\left| \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C\varrho}{\sigma^3\sqrt{n}}$$

Esséen (1942): $C = 7,59$.
van Beeck (1972): $C = 0,7975$.
Shiganatov (1986): $C = 0,7655$.
Shevtsova (2007): $C = 0.7056$. Ez a legjobb jelenleg.
Esséen elméleti korlátja: $C \geq \frac{\sqrt{10}+3}{6\sqrt{2\pi}} \approx 0,4097$.

Ezért ha n fix és nem határértékben érdekes a feladat, akkor nagy valószínűséggel lehet tévedni. Pl. ha $n = 100$, vagy $n = 10000$, akkor $c\frac{1}{10}$, vagy $c\frac{1}{100}$ lehet az eltérés az igazi valószínűségtől.
Így a videós példában hiába számoltunk kapacitást 10^{-6} valószínűséges hibára, a tévedés nagyságrendje ennél sokkal nagyobb lehet.

Hoeffding-egyenlőtlenség

Tétel (Hoeffding-egyenlőtlenség)

Legyen $a_k \le X_k \le b_k$ *1 val. Ekkor*

$$\mathbf{P}(S_n - \mathbf{E}S_n \ge nc) \le \exp\left\{-\frac{2n^2c^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right\}.$$

Vagy más formában

$$\mathbf{P}(S_n \ge \mathbf{E}S_n + t) \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right\}.$$

A Hoeffding-egyenlőtlenség igen hatékony tud lenne, hiszen nem kell tudni az X_i-knek az eloszlását, csak a korlátait, sőt az egyedi várható értékeket sem kell tudni, csak az összesített várható értéket.

Hoeffding-egyenlőtlenség alkalmazása

Beengedés szabályozás

Interneten keresztül történő videó szolgáltatás esetén a felajánlott videók bitrátája 2,6 és 3 Mbps között változik (VBR kódolást használtak minden esetben) átlagosan 2,8 Mbps. Ha csúcsidőben egy bizonyos szervernél 1000 igényre számítanak, akkor mekkorára kell tervezni a sávszélességet, hogy egy másodperc alatt legfeljebb 10^{-6} valószínűséggel ne tudjon minden igénynek eleget tenni.

Használjuk a Hoeffding-egyenlőtlenséget!
$a_i = 2,6$ $b_i = 3$, és $\mathbf{E}S_{1000} = 2800$ Mbps. Ekkor a sávszélesség foglaltság S_{1000}, amire: $\mathbf{P}(S_{1000} \geq 2800 + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{160}\right\}$. A legkisebb t keressük, amire a hiba $\exp\left\{-\frac{2t^2}{160}\right\} = 10^{-6}$. Ezt t-re megoldva: $t = 33,24$. Tehát a keresett kapacitás
$C = \mathbf{E}S_{1000} + t = 2833,24$.
A 33,24 a 2800-nak a 1,2%-a.

Hoeffding-egyenlőtlenség alkalmazása

Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.

1. Mekkora napi kapacitású szemétégető üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnek, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.
2. Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett 10^{-8}-os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.

Randomizált algoritmusok

Tegyük fel, hogy egy számítógép $p > \frac{1}{2}$ valószínűségek tudja kiszámolni a helyes eredményt két lehetséges érték közül ($a - b$.
n-szer végrehajtjuk a kísérletet, majd egyszerű többségi döntést hozunk: azt tekintjük eredménynek, amelyik többször jött ki.

(1) Mi a valószínűsége annak, hogy rossz döntést hozunk?

(2) Ha ismert p, akkor hányszor kell lefuttatni az algoritmust, hogy legfeljebb $\varepsilon = 0,05$ valószínűséggel tévedjünk.

Randomizált algoritmusok (quantum számítógép)

Legyen $X_k = 1$, ha rossz az algoritmus eredménye, 0, ha jó az eredmény. Ekkor S_n a rossz eredmények száma n futtatásból. A rossz értéket fogadjuk el a két lehetőség közül, ha $S_n > \frac{1}{2}n$.

(a) Tehát a rossz döntés valószínűsége $\mathbf{P}\left(S_n > \frac{1}{2}n\right)$.

(b) Ha fixáljuk a rossz döntés valószínűségét, ε-t, akkor számoljuk ki a minimális n-et, amire $\mathbf{P}\left(S_n > \frac{1}{2}n\right) \le \varepsilon$.

Használjuk a Hoeffding-egyenlőtlenséget: $\mathbf{P}\left(S_n > \mathbf{E}S_n + t\right) \le$.

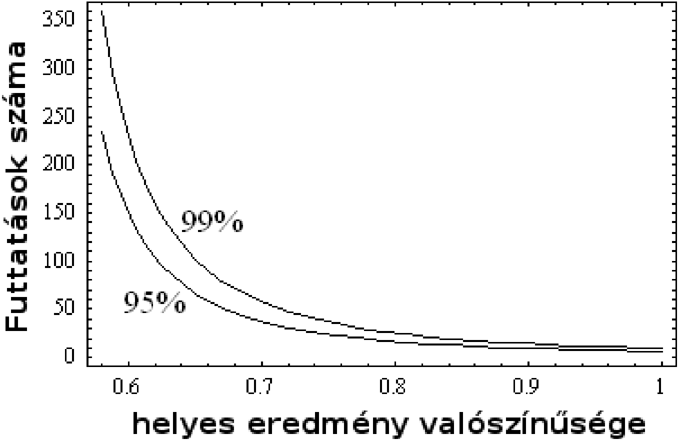
$\mathbf{P}\left(S_n > \frac{1}{2}n\right) = \mathbf{P}\left(S_n > (1-p)n + t\right)$. Ekkor $\frac{1}{2}n = (1-p)n + t$ egyenlőségből: $t = \left(p - \frac{1}{2}\right)n$.
Továbbá $a_k = 0 \le X_k \le b_k = 1$ minden k-ra.

A Hoeffding-korlátból:

$e^{-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}} = e^{-\frac{2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 n^2}{n \cdot 1}} = e^{-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 n} = \varepsilon$. Tehát, ...

Randomizált algoritmusok

$\mathbf{P}$(hibás többségi döntés n futtatásból) $\leq e^{-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 n} = \varepsilon$.
Összefüggésből,
$n = \frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2} \ln \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (Az ábrán: $\varepsilon = 0,05$, $\varepsilon = 0,01$)



Nagy eltérés tétel
Feladat felvetés

A nagy számok törvénye: $\mathbf{P}\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\to m\right)\longrightarrow 1$

Ha $a<m<b$: $\mathbf{P}\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\longrightarrow 1$

Innen következik, hogy ha $m<a<b$, akkor

$\mathbf{P}\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\longrightarrow 0$

Vagy más formában:

$\mathbf{P}\left(an<X_1+X_2+\cdots+X_n<bn\right)\longrightarrow 0$

Mit tudunk mondani fix n-re, azaz

$\mathbf{P}\left(\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\approx\ldots$

Nagy eltérés tétel

Tétel (Cramér-tétel)

Legyenek X_i-k i.i.d. valváltozók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel és (a,b) egy valós intervallum. Ekkor létezik egy $I(x)$ „ráta függvény” úgy, hogy

$$-\frac{1}{n}\ln \mathbf{P}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\inf_{a<x<b} I(x).$$

Szemléletesen:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\approx e^{-n\cdot\inf_{a<x<b} I(x)}$$

vagy $\mathbf{P}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\approx x\right)\approx e^{-nI(x)}$

Fontos megjegyzés: **Ez felső becslés minden n-re!!!**

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\in(a,b)\right)\leq e^{-n\cdot\inf_{a<x<b} I(x)}$$

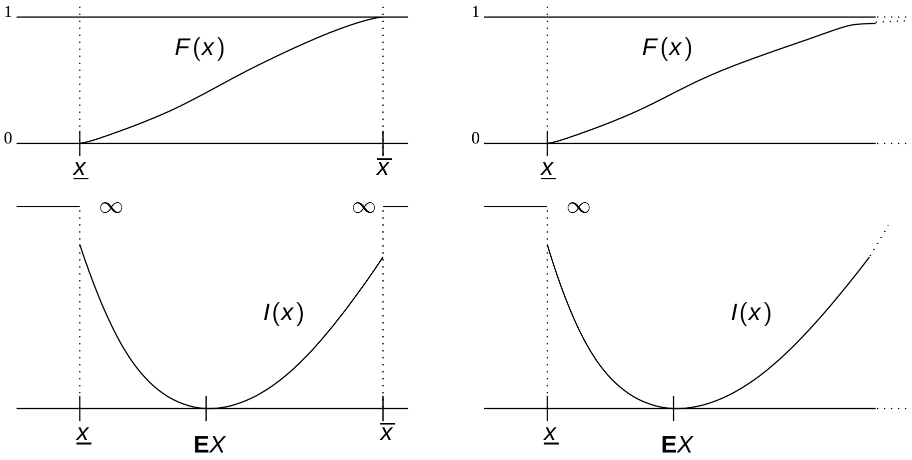
Nagy eltérés tétel
A ráta függvény kiszámolása

$$M(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X}, \quad \hat{I}(\lambda) := \ln M(\lambda),$$

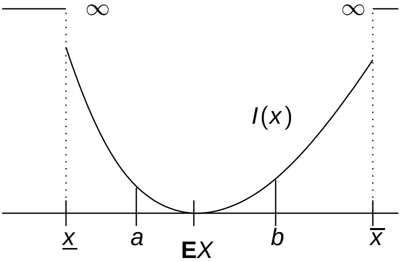
$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \hat{I}(\lambda)).$$

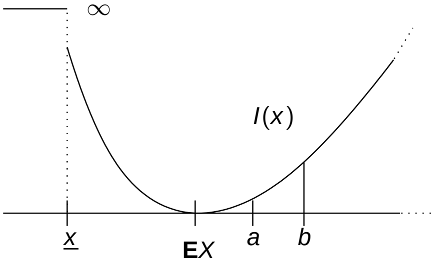
Könnyen bizonyítható, hogy $I(x)$ mindig konvex, továbbá a minimuma X várható értékében van, azaz $I(\mathbf{E}X) = 0$

Nagy eltérés tétel
A ráta függvény



Nagy eltérés tétel
A ráta függvény





Ha $a < \mathbf{E}X < b$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \in (a, b)\right) \to e^{-n \inf_{a<x<b} I(x)} = e^0 = 1.$$

Ha $\mathbf{E}X < a < b$:

$$\mathbf{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \in (a, b)\right) \to e^{-n \inf_{a<x<b} I(x)} = e^{-nI(a)}.$$

Nagy eltérés tétel
A ráta függvény kiszámolása

$$M(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X}, \quad \hat{I}(\lambda) := \ln M(\lambda),$$

$$I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \hat{I}(\lambda)).$$

Könnyen bizonyítható, hogy $I(x)$ mindig konvex, továbbá a minimuma X várható értékében van, azaz $I(\mathbf{E}X) = 0$

Praktikusan: ha $x \in (\underline{x}, \overline{x})$, akkor az $\hat{I}'(\lambda)) = x$ egyenletnek létezik egyetlen megoldása, $\lambda(x)$. Ekkor

$$I(x) = x\lambda(x) - \hat{I}(\lambda(x)).$$

Nagy eltérés tétel
A ráta függvény kiszámolása

Normális $\mathcal{N}(m,\sigma)$: $M(\lambda) = e^{m\lambda + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}}$, $I(x) = \dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$, ha $x \in \mathbb{R}$ $\mathbf{E}X = m$, $I(m) = 0$

Binomiális(N,p): $M(\lambda) = (1-p+pe^{\lambda})^N$,
$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{N-x}\frac{1-p}{p}\right) - N\ln\left((1-p)\frac{N}{N-x}\right)$, ha $0 < x < N$.
$\mathbf{E}X = Np$, $I(Np) = 0$

Poisson(λ): $M(\lambda) = e^{\lambda(e^t-1)}$, $I(x) = x\ln\left(\frac{x}{\lambda}\right) - x + \lambda$, ha $0 < x$.
$\mathbf{E}X = \lambda$, $I(\lambda) = 0$

Geometriai(p): $M(\lambda) = \dfrac{pe^{\lambda}}{1-(1-p)e^{\lambda}}$,
$I(x) = x\ln\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{p}{1-p}(1-x)\right)$, ha $x > 1$.
$\mathbf{E}X = \dfrac{1}{p}$, $I\left(\frac{1}{p}\right) = 0$

Nagy eltérés tétel
A „videós” példa újra

Itt már kell tudni az eloszlást! Tegyük fel, hogy $X_i \sim \mathcal{N}(2,8;0,06)$. Ekkor $I(x) = \dfrac{(x-2,8)^2}{0,0036}$ $\left(I(x) = \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$.
Tehát

$$\mathbf{P}(S_n > C) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} > c\right) \le e^{-n\frac{(c-m)^2}{2\sigma^2}} = e^{-n\frac{(c-2,8)^2}{0,0036}}$$

$$\mathbf{P}(S_{1000} > C) =$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_{1000}}{1000} > c\right) \le e^{-1000\frac{(c-2,8)^2}{0,0036}} = 10^{-6}.$$

Ezt c-re megoldva azt kapjuk, hogy $c = 2,81$, azaz a kapacitás $C = 1000c = 2810$.

Momentum probléma

1. (Létezés:) Adott egy számsorozat, $m_1, m_2, \ldots$. Létezik-e olyan F eloaszlásfüggvény, amely pont ezeket a momentumokat állítja elő?
   Pontosabban:
   $$\forall n \, \mathbf{E}X^n = m_n$$
   ahol X eloszlásfüggvénye F.
2. (Egyértelműség:) Egy eloszlás momentumai meghatározzák-e az eloszlást?
   Pontosabban: Az $F(x)$ elofv az $m_1, m_2, \ldots$ momentumokat állítja elő. Létezik-e egy másik, F-től különböző eloszlásfüggvény, amelynek ugyanezek a számok a momentumai?

Momentum probléma

3 különböző eset:

1. $F(x)$ tartója $(-\infty, \infty)$ (Hamburger momentum probléma)
2. $F(x)$ tartója $[0, \infty)$ (Stieltjes momentum probléma)
3. $F(x)$ tartója egy korlátos intervallum $[a, b]$ (Hausdorff momentum probléma)

Momentum probléma

$F(x)$ tartója $(-\infty, \infty)$ (Hamburger momentum probléma)

Létezik egy eloszlás adott $m_1, m_2, \dots$ sorozat esetén ezekkel a momentumokkal, ha a

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & \dots \\ m_2 & m_3 & m_4 & \dots \\ m_3 & m_4 & m_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

mátrix pozitív szemidefinit, azaz $\sum_{i,j\geq 1} m_{i+j} c_i \overline{c_j} \geq 0$ tetszőleges c_n korlátos komplexszám sorozatra.

Az eloszlás egyértelmű, ha $|m_n| \leq C \cdot D^n n!$ valamilyen pozitív C, D konstansokkal, minden n számra.

Valószínűségi változók összegének határértéke

Adott $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Kérdés, milyen eloszláshoz konvergál

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - b_n}{a_n} \to \ldots$$

ha $n \to \infty$, valamilyen a_n és b_n sorozatokkal?
Ha létezik határérték, akkor az csak stabilis eloszlású lehet. Mi az, hogy stabilis?

Definíció (Stabilis eloszlás)

X stabilis eloszlású, ha tetszőleges n esetén és tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számok esetén $a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$ eloszlása megegyezik $\alpha_n X + \beta_n$ eloszlásával, ahol α_n és β_n megfelelően választott valós számok. Speciálisan

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{\text{elo}}{=} \alpha_n X + \beta_n.$$

Példák stabilis eloszlásra

Csak végtelen tartójú eloszlás lehet stabilis. Példa: Poisson, Normális, ...

Volt: két független Poisson eloszlású valváltozó összege Poisson eloszlású

Stabilis eloszlások

Állítás (Szimmetrikus stabilis eloszlások)

A stabilis eloszlásokat a karakterisztikus függvényükkel lehet megadni. Ha egy stabilis eloszlás szimmetrikus is, akkor a karakterisztikus függvénye*

$$\varphi(t) = e^{-c|t|^{\alpha}}$$

alakú, ahol α a stabilis eloszlás indexe, $0 < \alpha \leq 2$.
Másrészt, $\varphi(t) = e^{-c|t|^{\alpha}}$ alakú függvény egy stabilis eloszlás karakterisztikus függvénye.

A sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény csak néhány paraméter érték esetén lehet megadni. Pl.: normális eloszlás: $\alpha = 2$ $\varphi(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$, $f_{0,\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

Stabilis eloszlások

Vonzási tartomány

Tétel (Szimmetrikus stabilis eloszlások vonzási tartománya)

Ha $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel

- *szimmetrikus eloszlásúak: $F(-x) = 1 - F(x)$*
- *a farok eloszlás hatványrendű: $x^{\alpha}(1 - F(x)) \to b$, amint $x \to \infty$, valamilyen $0 < \alpha < 2$, $b \in (0, \infty)$ számokra.*

Ekkor $\dfrac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ konvergens és a határeloszlás α indexű szimmetrikus stabilis eloszlás.

Példa ilyen valváltozókra: $f(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ \dfrac{\alpha}{2|x|^{\alpha+1}} & |x| \geq 1 \end{cases}$

($\approx$ szimmetrikus Pareto $(1, \alpha)$)

Maximumok konvergenciája

Legyen $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Továbbá legyen $M_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
Ha minden x esetén $F(x) < 1$ és $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}(1 - F(x)) = b$ valamilyen α, b pozitív számokkal (azaz $1 - F(x) \sim x^{-\alpha}$, ha $x \to \infty$), akkor $n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n$ eloszlásban konvergál:

$$\mathbf{P}\left(n^{-\frac{1}{\alpha}} M_n < x\right) \to e^{-bx^{-\alpha}}, \qquad \text{ha } x > 0.$$

Ez nem csak stabilis eloszlásokra igaz.