Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2023. december 19. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Legyenek M és $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ független valószínűségi változók, $M \sim Poi(3)$ és $\xi_i \sim B\left(\frac{2}{3}\right)$. Legyen $X = \sum_{i=1}^{M} \xi_i$. Határozzuk meg X eloszlását!

   Értsd: adjuk meg a lehetséges értékek valószínűségét, vagy az eloszlásfüggvényt, vagy a generátorfüggvényt, vagy az eloszlás nevét – kinek mi a kényelmes.

2. Az X_n diszkrét idejű Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, átmenetmátrixa

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.1 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

   a.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 6 \mid X_0 = 1)$ feltételes valószínűség?

   b.) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{100} = 6 \mid X_0 = 1)$ feltételes valószínűség?

3. Egy adatfeldolgozó kütyü 3-féle állapotban lehet: 1. várakozik ; 2. számol ; 3. kommunikál. A feldolgozandó adatok Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Ha egy adat érkezésekor a kütyü éppen várakozik, akkor számolni kezd, és az előzményektől függetlenül exponenciális eloszlású véletlen ideig – melynek várható értéke 6 másodperc – számol, majd exponenciális eloszlású véletlen ideig – melynek várható értéke 3 másodperc – kommunikál, aztán újra várakozni kezd. Amelyik adat a kütyüt számolás vagy kommunikáció közben találja, az elvész. Jelölje $X(t)$ a kütyü állapotát t perc elteltével. Így $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc.

   a.) Rajzoljuk fel $X(t)$ gráf reprezentációját!

   b.) Írjuk fel $X(t)$ infinitezimális generátorát!

   c.) Hosszú távon az idő mekkora hányadát tölti a kütyü várakozással?

4. Az X valószínűségi változó eloszlásáról tudjuk, hogy $X \in (0, \infty)$ biztosan, és $(0, \infty)$-en a sűrűségfüggvénye $f(x) = 2\theta x e^{-\theta x^2}$ alakú, ahol $\theta > 0$ paraméter, ám az értékét nem ismerjük. Mintát vettünk X-ből, és azt kaptuk, hogy 0.9113; 0.4931; 0.3709; 0.3091; 0.3713. Adjunk maximum likelihood becslést θ-ra!

5. Mérnök Mari újszülött gyermekét tudományosan szeretné fürdetni, pontosan $37°C$-os vízben, ezért az okos-csaptelep hőmérséklet-szabályzóját $37°C$-ra állítja, és úgy engedi a vizet. Ám a csaptelepben nem bízik, ezért a hőmérsékletet egy digitális lázmérővel ellenőrzi. A lázmérő által kiírt érték normális eloszlású véletlen szám, melynek várható érétke a tényleges hőmérséklet, szórása pedig 0.3 ($°C$-ban). Mari ezért 5 független mérést végez, és az alábbi eredményeket kapja: 36.9; 37.6; 36.7; 37.9; 36.9. Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a null-hipotézisről, hogy a víz hőmérésklete pontosan $37°C$.

   Segítség: Az adatsor elemeinek összege 186, *négyzeteik összege* 6920.28.