$\boxed{1.}$

a.) Mindegy, hogy Móricka mit dob, Pistike úgyis minden alkalommal $\frac{5}{6}$ val-séggel dob <u>mást</u>, függetlenül a korábbiaktól

$$\Rightarrow P(\text{3 dobás elég}) = 1 - P(\text{3-szor mást dob}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$\approx 0.42 = 42\%$$

b.) Legyen X Pistike dobásainak száma:

$X \sim \text{Geom}\left(\frac{1}{6}\right)$ (addig dobál, amíg sikerrel nem jár)

$$\Rightarrow E(1+X) = 1 + EX = 1 + \frac{1}{1/6} = 7$$

[2]

1. megoldás: Minden Anna-dobásnál

- $\frac{1}{2}$ val. séggel F, ekkor Béla is dob; ezen belül
- $\frac{1}{2}$ —//— —//— Cili is dob; ezen belül
- $\frac{1}{2}$ —//—

Vagyis

$p := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ val.séggel jutnak el addig, hogy Cili dob és fejet.

Ezt $n = 1000$-szer próbálják meg függetlenül

$\Rightarrow X \sim Bin(n = 1000,\ p = \frac{1}{8})$

$$\Rightarrow \boxed{g_X(z) = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}z\right)^{1000}}$$

2. megoldás: Legyen Z az Anna által dobott fejek száma; Legyen $\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{ha Béla } i\text{-edik dobása fej} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

és legyen Y a Béla által dobott fejek száma

Így $Z \sim Bin(1000, \frac{1}{2})$, $\eta_i \sim B(\frac{1}{2})$ $\qquad g_Z(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^{1000}$

$\qquad g_\eta(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z$

és $Y = \sum_{i=1}^{Z} \eta_i$ $\boxed{\text{véletlen tagszámú összeg}}$

$$\Rightarrow g_Y(z) = g_Z(g_\eta(z)) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)\right]^{1000} = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}z\right)^{1000}$$

Ugyanígy legyen $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha Cili } i\text{-edik dobása fej} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$ $\qquad \xi_i \sim B(\frac{1}{2})$

Így $X = \sum_{i=1}^{Y} \xi_i \Rightarrow \underline{g_X(z)} = g_Y(g_\xi(z)) = \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)\right]^{1000} = \underline{\left(\frac{7}{8} + \frac{1}{8}z\right)^{1000}}$

$\boxed{3.}$

1. megoldás: Tekintsük az ügyfelek generációit:

- 0. generáció a legelső telefonáló egymaga
- 1. —||— az, aki őt ő kistelgalása alatt telefonál

⋮ stb:

Az n. generáció olyan azokból, akik az $(n-1)$-edik generáció tagjainak kistelgálás alatt telefonálnak

Z_n = az n. generáció tagjainak száma

Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat az X egylépéses utódszám-eloszlás

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

$$\Rightarrow m = \mathbb{E}X = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$$

$\Rightarrow$ a folyamat kritikus (és nem elfajult)

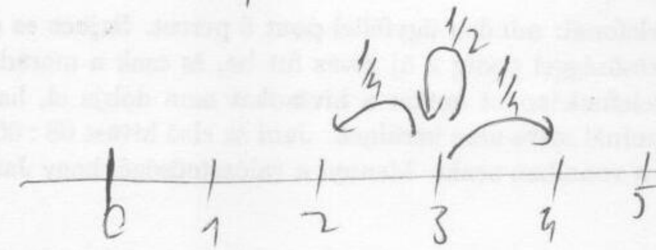
$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{örökké telefonál}) = 1 - \mathbb{P}(\text{kihalás}) = \underline{\underline{0}}$$

[3]

2. megoldás: legyen X_n a várakozók száma az n-edik ügyfél kiszolgálás után. (amíg ez el nem éri a nullát)

Ez $\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ val. séggel 1-gyel nő
$\rightarrow$ $\frac{1}{2}$ –||– változatlan
$\rightarrow$ $\frac{1}{4}$ –||– 1-gyel csökken
} minden lépésben



Vagyis X_n szimmetrikus bolyongás és előadásról tudjuk, hogy ez 1 dimenzióban rekurrens

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{eléri a nullát}) = \mathbb{P}(\text{Jani hazamehet}) = 1$

$\Downarrow$

$\mathbb{P}(\text{sose megy haza}) = 0$

4.

A piripécsi és kukutyini gólok külön-külön független Poisson folyamatot alkotnak, $1.5 \left(\frac{\text{gól}}{\text{óra}}\right)$ ill. $2.1 \left(\frac{\text{gól}}{\text{óra}}\right)$ rátával.

a.) Az összeg is Poi-folyamat $1.5 + 2.1 = 3.6$ rátával

$\Rightarrow$ az első gólig eltelt idő $T_1 \sim Exp(\lambda = 3.6)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\, T_1 = \frac{1}{3.6 \frac{1}{\text{óra}}} = \frac{1}{3.6}\ \text{óra} = \frac{60}{3.6}\ \text{perc} = 16\frac{2}{3}\ \text{perc}$$

$= 16$ perc 40 másodperc

b.) A piripócsi ill. kukutyini gólok megkaphatók a teljes gól-folyamat színezésével is $p_P = \frac{1.5}{3.6} \approx 0.417$

illetve $p_K = \frac{2.1}{3.6} \approx 0.583$ valószínűségekkel

$\Rightarrow P(\text{az első gólt K-re színeztük}) = p_K \cancel{\approx 58}$

$= p_K \approx 58.3\%$

c.) A két félidő független,

$X :=$ Piripócs góljai a 2. félidőben $\sim Poi(1.5 \cdot \underset{\substack{\text{eltelt idő}\\ \text{órában}}}{\frac{3}{4}}) = Poi(\frac{9}{8})$

$Y :=$ Kukutyin — " — $\sim Poi(2.1 \cdot \frac{3}{4}) = Poi(1.575)$

X és Y is független

$$\Rightarrow P(X=2, Y=1) = P(X=2)\,P(Y=1) = e^{-\frac{9}{8}} \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^2}{2!}\, e^{-1.575} \frac{(1.575)^1}{1!}$$

$\approx 0.067 = 6.7\%$

$\boxed{5}$

1 megoldás: Legyen $n=50$ és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik anime-kedvelő megtalálásához szükséges próbálkozások száma (onnantól, hogy az $(i-1)$-edik már megvan). Így

$S_n := X_1 + \dots + X_n$ az összes megkérdezett száma, és

$X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{Geom}(0.2)$ függetlenek, a kérdés $\mathbb{P}(S_n > 350)$.

$m := \mathbb{E}X_1 = \frac{1}{0.2} = 5$, így a Cramér nagy eltérés tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n > 350) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{350}{50} = 7\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (7,\infty)\right) \underset{7>m}{\lesssim}$$

$$\lesssim e^{-nI(7)}, \text{ ahol } I \text{ a } \mathrm{Geom}(0.2) \text{ eloszlás}$$

Cramér féle rátafüggvénye:

$$x>1\text{-re} \quad I(x) = (x-1)\ln\frac{x-1}{1-0.2} - x\ln x - \ln 0.2, \text{ vagyis}$$

$$I(7) = 6\ln\frac{6}{0.8} - 7\ln 7 - \ln 0.2 \approx 0.077485$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{P}(S_n > 350)}} \lesssim e^{-3.87} \approx \underline{\underline{0.02 = 2\%}}$$

$\boxed{5}$

$\boxed{2.\text{ megoldás}}$: Vegyük észre, hogy pontosan akkor nem elég 350 embert megkérdezni, ha 350 kérdésből 50-nél kevesebb anime-kedvelőt talál. Ezért legyen $n = 350$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re legyen $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik próbálkozás sikeres} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Így $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ a sikeres próbálkozások száma, a kérdés pedig $\mathbb{P}(S_n < 50)$.

Mivel $X_i \sim B(0.2)$ függetlenek és $m := \mathbb{E}X_1 = 0.2$,

2/a megoldás: A Cramér nagy eltérés ~~szeri~~ tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n < 50) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < \frac{50}{350} = \frac{1}{7}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \left(-\infty, \frac{1}{7}\right)\right) \quad \frac{1}{7} < m$$

$$\lessapprox e^{-n I(\frac{1}{7})}$$, ahol I a $B(0.2)$ eloszlás Cramér féle rátafüggvénye:

$$0 < x < 1\text{-re} \quad I(x) = x \ln \frac{x}{0.2} + (1-x) \ln \frac{1-x}{1-0.2}$$, vagyis

$$I\left(\tfrac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} \ln \frac{1/7}{0.2} + \frac{6}{7} \ln \frac{6/7}{0.8} \approx 0.01107$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{P}(S_n < 50)}} \lessapprox e^{-3.87} \approx \underline{\underline{0.02 = 2\%}}$$

$\boxed{5}$

<u>3. megoldás:</u> Legyen $n=350$ és X_i, S_n ugyanaz, mint a 2. megoldásban; A kérdés $\mathbb{P}(S_n < 50)$.

Mivel $a_i := 0 \le X_i \le 1 =: b_i$ korlátokkal X_i korlátos (és függetlenek), a ~~Hoeffd~~ Hoeffding-egyenlőtlenség szerint $t=20$ választással

$$\underline{\mathbb{P}(S_n < 50)} \overset{\mathbb{E}S_n = 350 \cdot 0.2 = 70}{=\!=\!=} \mathbb{P}(S_n < \mathbb{E}S_n - t) \le$$

$$\le \exp\left\{ - \frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} \right\} = \exp\left\{ - \frac{2 \cdot 20^2}{\sum_{i=1}^{350} (1-0)^2} \right\} =$$

$$= e^{-\frac{2 \cdot 400}{350}} \approx e^{-2.29} \approx 0.10 = \underline{\underline{10\%}}$$