①

Legyen X a szóban forgó hívás hossza percben, 10:00-tól számítva. Ez nem azonos a hívás teljes hosszával, de ez is exponenciális eloszlású, $EX=3$, tehát $X \sim Exp(\lambda=\frac{1}{3})$, az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt.

X eloszlásfüggvénye $F_X(x)=\mathbb{P}(X<x)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & \text{, ha } x\geq 0 \\ 0 & \text{, ha nem,} \end{cases}$

amiből

$$\mathbb{P}(\text{10:03-ig nem ér véget})=\mathbb{P}(X>3)=1-F_X(3)=e^{-\lambda x}\Big|_{\lambda=\frac{1}{3},\, x=3}$$

$$=e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}=e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0.368=36.8\%$$

②

Legyen A_1 az az esemény, hogy az 1. (számú) hívás nem ér véget 10:03-ig; A_2 az, hogy a 2. (számú), A_3 pedig az, hogy a 3. (számú) hívás nem ér véget. Ezek a szöveg szerint függetlenek és az előző részfeladat alapján $\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(A_3)=\frac{1}{e}$, amiből

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem ér véget})=\mathbb{P}(A_1A_2A_3)\overset{\text{függetlenség}}{=}\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$$=\left(\frac{1}{e}\right)^3=e^{-3}\approx 0.0498=4.98\%$$

③

Az előző feladatból látszik, hogy ha k hívás van folyamatban, akkor $\left(\frac{1}{e}\right)^k$ annak a val. sége, hogy egyik sem ér véget 10:03-ig.

Vagyis ha N a 10:00-kor folyamatban lévő hívások (véletlen) száma (egy val. változó), „A" pedig az az esemény, hogy 10:03-ig egy hívás sem ér véget, akkor

$\mathbb{P}(A \mid N=k) = \left(\frac{1}{e}\right)^k$ minden k-ra

↳ konkrétan $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$-ra

[Vegyük észre, hogy a képlet $k=0$-ra is működik:
$\mathbb{P}$(egy sem ér véget | nincs minek végetérni) $= 1$.]

Mivel az $\{N=0\}, \{N=1\}, \{N=2\}, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, a teljes valószínűség tétel szerint $\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=k)\,\mathbb{P}(A \mid N=k)$.

A szöveg szerint $N \sim \text{PessGeom}(p)$ ahol $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, vagyis $p = \frac{1}{6} \Longrightarrow \mathbb{P}(N=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Összerakva:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6e}\right)^k \overset{\text{mértani}}{\underset{\text{sor}}{=}} \frac{1/6}{1 - \frac{5}{6e}}$$

$$= \frac{1}{6 - 5/e} \approx 0.240 = 24.0\%$$