

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

2. ZH, 2022 ősz

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

Munkaidő: 90 perc

1. Egy járvány során egy fertőzött személy véletlen számú ismerőst fertőzi meg, mielőtt meggyógyul. Röst von Piripócs számításai szerint a megfertőzött ismerősök számának eloszlását az alábbi generátorfüggvény írja le:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{5-4z}}.$$

- a.) Mi az esélye, hogy egy fertőzött személy egyik ismerősének sem adja tovább a betegséget? (2 pont)
 - b.) Mi az esélye, hogy valaki pontosan egy ismerőst fertőzi meg? (2 pont)
 - c.) Átlagosan hány embert fertőz meg valaki? (2 pont)
 - d.) A fertőzött ismerősök továbbadhatják a fertőzést másoknak: mindenki ugyanolyan eloszlás szerint, az előzményektől függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy a járvány globális járvánnyá fog kinőni? (Vagyis, mekkora valószínűséggel él tovább a fertőzés „örökké”?) (Tipp: ha egy harmadfokú egyenletnek egy gyökét tudjuk előre, az segít a többi gyök megtalálásában.) (4 pont)
2. Egy matematika weboldalra átlagosan 8 óránként érkezik egy meme. A világ bármely pontjáról küldhetőek be memek, így az esti órákban sem csökken a gyakoriságuk. A memek 20%-a szóvicc, 30%-a fizikus vicc ($\pi^2 = g = 10$), 40% jelölésekből eredő vicc, 10% pedig egyéb.
 - a.) Pistike csak a fizikus vicceket szereti. Mi a valószínűsége, hogy 2 nap alatt legfeljebb egy ilyen viccet talál? (5 pont)
 - b.) Egy napon 5 meme érkezett be. Mi az esélye, hogy ebből 3 este 8 és éjfél között jelent meg? (5 pont)
 3. A piripócsi panel-lakótelepen az utcák szabályos négyzetrácsot alkotnak: 4 észak-déli és 4 kelet-nyugati utca van, 16 utcasarokkal. Egy macska esténként véletlenszerűen sétál a panelek között, minden sarkon egyenlő valószínűséggel választva a kivezető utak közül (beleértve azt is, amelyiken jött), az előzményektől függetlenül.
 - a.) Feltéve, hogy a lakótelep dél-nyugati sarkából indult, mi a valószínűsége, hogy két lépés után visszatért? (3 pont)
 - b.) Feltéve, hogy a lakótelep dél-nyugati sarkából indult, körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 200 lépés után az észak-keleti sarokban lesz? (3 pont)
 - c.) Jellemezzük a macska helyzetét (x, y) koordinátákkal, ahol $x, y = 0, 1, 2, 3!$ Cicánk egy (nagyon) hosszú téli estén N -szer ér el valamelyik utcasarokra. Ezeknek hányad részében jár a $(0, 0)$, a $(0, 2)$ illetve a $(2, 1)$ koordinátáknál? (4 pont)
 4. Egy tantárgyra 200 hallgató jár. Korábbi évek statisztikái alapján minden hallgató 60% eséllyel ér el legalább elégségest pót-ZH nélkül, a többiektől függetlenül.
 - a.) Normális eloszlás segítségével adjunk közelítést annak az esélyére, hogy több mint 136 hallgató lesz, akinek nincs szüksége pót-ZH-ra! (5 pont)
 - b.) Adjunk felső becslést a fenti közelítés hibájára! (5 pont)