Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH

2019 ősz, 2019.12.04 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: csütörtök 8-10 (R504); csütörtök 10-12 (R517); péntek 10-12 (R516).

1. Egy véletlen rekurzív algoritmus futása során kezdetben elindul egyetlen folyamat, melynek sorsa kétféle lehet:

   i.) Eredményesen lefut és kilép anélkül, hogy újabb folyamatot indítana. Ennek valószínűsége $\frac{6}{10}$.

   ii.) Mielőtt lefutna, véletlen számú újabb folyamatot indít, amik ugyanolyanok, mint ő maga. Ezek száma lehet 1, 2, 3 vagy 4, azonos (vagyis $\frac{1}{10}$) valószínűséggel. Az eredeti folyamat csak akkor lép ki, amikor ezek mind lefutottak.

   Az algoritmus futása során elinduló egyes folyamatok mind ugyanolyan eloszlással hoznak létre újabb folyamatokat, függetlenül egymástól és az előzményektől. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az eredeti folyamat előbb-utóbb kilép?

2. Móricka azt tervezi, hogy a zsebszámológépével generál $n = 3888$ darab független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású véletlen számot, és ezekből átlagot számol. A centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével megbecsülte annak a valószínűségét, hogy az átlag legalább 0.54 lesz. Legfeljebb mennyi lehet ennek a becslésnek a hibája a ~~Hoeffding-egyenlőtlenség~~ Berry-Essen tétel szerint? (A tételbeli konstans választható $C = 0.48$-nak.)

3. Móricka azt tervezi, hogy a zsebszámológépével generál $n = 3888$ darab független, $[0, 1]$-en egyenletes eloszlású véletlen számot, és ezekből átlagot számol. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy az átlag legalább 0.54 lesz!

   (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I_{B(p)}(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1 - x) \ln \frac{1 - x}{q} \quad \textit{(ahol } q = 1 - p \textit{ és } 0 < x < 1\textit{).}$$

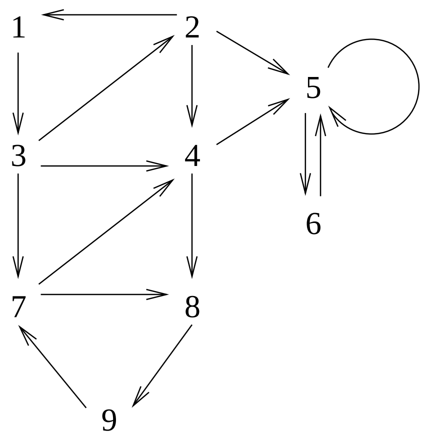
   A μ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I_{Exp(\mu)}(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x) \quad \textit{(ahol } x > 0\textit{).}$$

)

4. Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

   - zárt-e vagy nyílt,
   - lényeges-e vagy lényegtelen,
   - visszatérő-e vagy átmeneti,
   - mennyi a periódusa.



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

5. Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

   a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük* ***valamelyik****?)*

   b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

   c.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

   d.) Tegnap délben minden körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később egy se fog működni?

   e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?