

Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika

1. ZH minta

2015 ősz

A ZH-n 3 feladat lesz, ezek mindegyike 15 pontot fog érni. Ebbe nem fér bele minden feladattípusból 1 – 1, ezért a 3 feladat véletlenszerűen lesz kiválasztva az alábbi típuspéldákhoz nagyon hasonló feladatok közül, valamint esetleg a házi feladatokhoz nagyon hasonló feladatok közül. (A két csoport között jelentős az átfedés, de nincs tartalmazás.)

1. Egy pékségben az edénybe, amiben 5000 mazsolás keksz masszáját keverik, 20000 mazsolát öntenek.
 - (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott kekszben legalább 3 mazsola lesz?
 - (b) Három kekszet kiválasztottunk, ebből az első kettőben pont 3-3 mazsola volt. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadikban is pont 3 lesz?

2. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találmásra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

3. Egy fagyisnál minden gyerek kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ezalatt új gyerekek állhatnak be a sorba. Minden gyerek kiszolgálása alatt az újonnan beállók száma pesszimista geometriai eloszlású $p = 0,75$ paraméterrel (vagyis $X \sim Geom(p)$, ha $\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^k p$, $k = 0, 1, \dots$) és független az előzményektől.

Definíció: A fagyis bácsi foglaltsági periódusa az első gyerek érkezési pillanatában kezdődik és akkor ér véget, amikor először nincs kiszorgálnivaló gyerek.

- (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a foglaltsági periódus véges hosszú.
- (b) Nevezzük *első generációnak* az első gyerek kiszolgálása alatt érkező gyerekeket, (lehet, hogy egy sincs ilyen), második generációnak pedig az első generáció kiszolgálása alatt érkezőket. Mi annak a valószínűsége, hogy a „második generáció” átvizsgálása alatt nem érkezik több gyerek (vagyis hogy a harmadik generáció már üres)?
- (c) Legyen N az összes kiszorgált gyerek száma, beleértve a kezdőt is, egy foglaltsági periódus alatt. Határozzuk meg N generátorfüggvényét és várható értékét.

4. Legyen X_1, X_2, \dots, X_n független kockadobás-eredmények sorozata (vagyis minden X_i egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Ha valamilyen $K \in (10000; 60000)$ -re a $\mathbb{P}(S_n < K)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esséen tétel szerint? (Vigyázat: a tétel legegyszerűbb formájában *nulla várható értékű* val.változókról szól, és a kockadobás eloszlása *nem ilyen*.) (A Berry-Esséen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$ -nek.)

5. Legyen X_1, X_2, \dots, X_n független kockadobás-eredmények sorozata (vagyis minden X_i egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. Legyen $n = 10000$ és $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Adjunk nagy eltérés becslést az $S_n \geq 37000$ valószínűsége.

6. Egy kommunikációs csatornán videókat szeretnének átküldeni. Kétféle, azonos felhasználói élményt adó változó bitrátájú kódolás közül lehet választani.
- (a) Az 1. típusúban a videók átlagosan 2,8 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 1,5 Mbps.
 - (b) Az 2. típusúban a videók átlagosan 2,9 Mbps bitrátájúak, és az átlagtól való eltérés felfelé és lefelé maximum 0,5 Mbps.

Tudjuk, hogy csúcsideőben maximum 10000 videóra lehet számítani. Határozzunk meg egy olyan a kapacitást, amelyet a videók összes sávszélesség igénye legfeljebb 10^{-8} valószínűséggel lép túl – külön az egyik, illetve másik kódolás használata esetén. Ezek alapján melyik kódolást érdemes választani?