Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
1. ZH

2019 ősz, 2019.10.15 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlat időpontját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások: csütörtök 8-10 (R504); csütörtök 10-12 (R517); péntek 10-12 (R516).

1. Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a 6-os. Legyen X a dobott számok összege. Mennyi X várható értéke? *(Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első dobás eredménye szerint. Szabad kihasználni, hogy* $\mathbb{E}X < \infty$.*)*

   Megoldás: Definiálhatunk egy teljes, diszjunkt eseményrendszert, ami az első dobás kimenetele szerint partícionálja az eseményteret. $A_i = \{i \text{ az első dobás eredménye}\}$ A teljes várható érték tétele szerint:

   $$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}\left[X|A_i\right]\mathbb{P}(A_i)$$

   Ha az első dobás 6-os, akkor Móricka abbahagyja a dobálást, és $X = 6$. Ha nem, akkor az első dobás eredményét X-hez adja, és elölről kezdi a folyamatot.

   $$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{E}\left[X+i\right]\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 1 + \frac{1+2+3+4+5}{6} + \frac{5}{6}\mathbb{E}X$$

   $\mathbb{E}X < \infty$ ismeretében átrendezhetjük az egyenletet:

   $$\mathbb{E}X = 6\cdot\left(1+\frac{15}{6}\right) = 21$$

2. Pistikéék padlásán egy villanykörte van felszerelve, aminek az élettartama exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. Pistike csak évente kétszer megy fel a padlásra: december 23-án a karácsonyfadíszekért, illetve január 23-án, eltenni a karácsonyfadíszeket.

   Legutóbb, amikor Pistike december 23-án felment, azt vette észre, hogy az égőt felkapcsolva felejtette (nyilván január 23-án, amikor legutóbb ott járt), de már kiégett. Mi annak a valószínűsége, hogy az égő több, mint fél évet világított feleslegesen?

   Megoldás: Legyen X a villanykörte élettartama. Hónapokban számolva X eloszlása $Exp(1/12)$, kihasználva, hogy az exponenciális eloszlás paramétere a várható érték (1 év = 12 hónap) reciprokával egyezik meg.

   Az exponenciális eloszlás örökifjúsága miatt feltehetjük, hogy januárban hagyta felkapcsolva. A kérdéses valószínűség:

   $$\mathbb{P}\left(X > 6|X < 11\right) = \frac{\mathbb{P}(6 < X < 11)}{\mathbb{P}(X < 11)} = \frac{(1-e^{-11/12})-(1-e^{-6/12})}{1-e^{-11/12}} = \frac{e^{5/12}-1}{e^{11/12}-1}$$

3. Egy műszaki egyetem elavult, kézi kapcsolású telefonközpontjába a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan 2 percenként. A központban két kezelő ül, akik minden hívásnál kockadobással döntik el, hogy ki vegye fel: ha a dobás 1 vagy 2, akkor Jancsi veszi fel a hívást, ha pedig 3, 4, 5 vagy 6, akkor Juliska. (Minden hívás rövid ideig tart, így nem nagyon fordul elő, hogy a hívás érkezésekor valamelyikük éppen foglalt lenne.)

   a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 18:00 és 18:10 között Jancsinak egyszer sem kell felvennie a telefont?

   b.) 18:00 és 18:10 között Juliskának egyszer sem kellett felvennie a telefont. Ennek ismeretében mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsinak sem?

   c.) Jancsi és Juliska is 18:00-kor állt munkába. Mi a valószínűsége, hogy Jancsinak hamarabb kell telefont felvennie, mint Juliskának?

   Bocsánatot kérek: a szövegben lévő „átlagosan 2 percenként” kifejezés kétféleképpen is értelmezhető. Mi most értsük úgy, hogy *átlagosan percenként* 2 (és nem pedig úgy, hogy „átlagosan kétpercenként”). Fordított értelmezés esetén az alábbi megoldás értelemszerűen módosul: $\lambda = \frac{1}{2}$.

   Megoldás: Legyen a percenként bejövő hívások Poisson folyamata $N(t)$. A percenként érkező hívások átlagos száma megegyezik a folyamatot meghatározó Poisson eloszlás paraméterével $\lambda = 2$. Az egyes kezelők által felvett hívások is Poisson folyamatot követnek, amiket $N(t)$ megfelelő ritkításaként kapunk meg.

   Tehát a Jancsi által felvett hívások száma ($N_1(t)$) egy $2 \cdot \frac{1}{3}$ paraméterű Poisson folyamatot követ, a Juliska hívásait számláló $N_2(t)$ paramétere pedig $2 \cdot \frac{2}{3}$, ahol a ritkításhoz használt valószínűségeket a szabályos kockadobás eloszlása határozta meg.

   A Poisson folyamat időben homogén, ezért csak a vizsgált időtartam hossza lényeges a számítások szempontjából, a kezdete nem.

   a.) $\mathbb{P}(N_1(10) = 0) = e^{-\frac{2}{3}\cdot 10}$

   b.) Itt felhasználhatjuk, hogy az egyes kezelők által felvett hívások száma független, hiszen minden hívásnál egy az előzőektől független dobással döntik el ki vegye fel.

   $$\mathbb{P}(N_1(10) = 0 | N_2(10) = 0) = \mathbb{P}(N_1(10) = 0) = e^{-\frac{2}{3}\cdot 10}$$

   c.) Az első hívás beérkezésekor egy kockadobás dönti el, hogy melyikőjük veszi fel. Ha ez a dobás 1 vagy 2, akkor Jancsi, ha 3,4,5, vagy 6, akkor Juliska.

   $$\mathbb{P}(\text{Jancsinak hamarabb kell felvennie}) = \mathbb{P}(\text{az első dobás 1 vagy 2}) = \frac{1}{3}$$

4. Feldobunk 10 érmét, amiből 6 szabályos, 4 viszont hamis: ezeken a fej valószínűsége 60%. Legyen X a dobott fejek száma. Mi X generátorfüggvénye?

   Megoldás: Vezessünk be két valószínűségi változót: jelölje X_{sz} a szabályos érmével dobott fejek számát, míg X_h a cinkelt érmével dobottakét.

   X_{sz} eloszlása $Bin(6, 0.5)$, hiszen 6 szabályos érménk van, és ezeken a fej dobás valószínűsége 0.5. Ekkor az órán tanultak alapján

   $$G_{sz}(z) = (0.5 + 0.5z)^6,$$

   ami 6 független 0.5 paraméterű Bernoulli valószínűségi változó generátorfüggvényének szorzataként áll elő.

Hasonlóan X_h eloszlása $Bin\,(4, 0.6)$, valamint

$$G_h(z) = (0.4 + 0.6z)^4.$$

Mivel felírható 2 független változó összegeként $X = X_{sz}+X_h$, a keresett generátorfüggvény

$$G_X(z) = G_{sz}(z)G_h(z)$$

5. Az Y valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{z^4}{2-z}$.

   a.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 3)$ valószínűség?

   b.) Mennyi X várható értéke?

   c.) Mennyi X szórásnégyzete?

   (Tipp: a generátorfüggvényt jól megnézve a kérdéseket számolás nélkül is meg lehet válaszolni.)

   1. megoldás: A generátor függvény alakjából arra lehet következtetni, hogy egy geometriai eloszlás valamilyen függvényéhez tartozik. Indoklás: Legyen Y eloszlása optimista $Geom(p)$. Ekkor generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z} = \frac{z}{2-z}, \quad p = 0.5 \text{ választás mellett}$$

   A generátorfüggvény definícióját használva adódik, hogy

$$G_{Y+3}(z) = \frac{z^4}{2-z} = g(z)$$

   Mivel a generátorfüggvény egyértelműen meghatározza az eloszlást $X = Y + 3$. Ezt használva a kérdések megválaszolása triviális.

   a.) $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0$, hiszen csak $k > 0$ értékekre értelmezett.

   b.) $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y + 3 = \frac{1}{1/2} + 3 = 5$

   c.) $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}Y = \frac{1-1/2}{(1/2)^2} = 2$

   2. megoldás: A generátorfüggvény deriválásával meghatározhatóak a kívánt mennyiségek.

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \frac{4z^3(2-z) - z^4(-1)}{(2-z)^2} = \frac{(8-3z)z^3}{(2-z)^2} \\
g''(z) &= \frac{(-12z^3 + 24z^2)(2-z)^2 + (8-3z)z^3 2(2-z)}{(2-z)^4} = \frac{2z^2(3z^2 - 16z + 24)}{(2-z)^3} \\
g'''(z) &= \frac{6z(z^3 - 8z^2 + 24z - 32)}{(2-z)^4}
\end{aligned}$$

   Behelyettesítés után, a generátorfüggvény tulajdonságait használva:

   a.) $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{g'''(0)}{k!} = 0$

   b.) $\mathbb{E}X = g'(1) = 5$

   c.) $\mathrm{Var}X = g''(1) - (g'(1))^2 + g'(1) = 22 - 25 + 5 = 2$