Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

1.ZH megoldókulcs, 2022 ősz

Minden feladat azonos értékű. A végén az összpontszámot 10-re skálázzuk.

Minden megoldást részletesen indokolni kell. Azon belül minden alkalmazott jelölést be kell vezetni.

Munkaidő: 90 perc

1. Adott az $f(x)$ függvény:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

a.) Hogyan válasszuk meg a c konstanst, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény legyen? (3 pont)

b.) Legyen X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$! Mennyi X várható értéke? (3 pont)

c.) Mennyi X szórása? (4 pont)

<u>Megoldás:</u>

a)

Mivel $f(x)$ sűrűségfüggvény, ezért

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = c\int_0^2 x^2\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c\frac{4}{3},$$
$$c = \frac{3}{4}.$$

b)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_0^2 x^3\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{3}{2}$$

c)

Idézzük fel a $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$ azonosságot!

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_0^2 x^4\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{12}{5}$$
$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{12}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{20}$$
$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{3}{20}} \approx 0,387$$

2. Piripócs lakói Piripócs Coin (PC) nevű kripovalutát kezdtek el bányászni. A bányászáshoz egy számítógépes programot kell futtatniuk, mely egy másodperc alatt fut le és kis valószínűséggel egy PC-t generál. A próbálkozások egymástól függetlennek tekinthetőek. A piackutatók elemzése szerint átlagosan 2 évig kell futtatnia valakinek a számítógépét, míg egy PC birtokosa lehet.

a.) Jancsika is beszállt a maga gépével. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint egy év alatt lesz már Piripócs Coin-ja? (5 pont)

b.) Pistike pechére már 3 éve bányászik, de nem szerzett PC-t. Mi a valószínűsége, hogy összesen több mint 5 évet kell várnia, míg lesz egy PC-je? (5 pont)

Megoldás:

a)

Legyen X az eltelt idő, amíg valakinek a számítógépét futtatnia kell, míg egy PC-t generál! Mivel az eltelt idő folytonos (valamint a feladat leírása arra enged következtetni, hogy a geometriai eloszlás limeszéről van szó) X-et exponenciális eloszlással modellezhetjük egy ismeretlen λ paramétere mellett. Mivel $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, és tudjuk, hogy átlagosan 2 évig kell futtatni a számítógépet egy PC generálásához, ezért $X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$. X eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x} \ (x > 0).$$

A válasz tehát:

$$\mathbb{P}\left(X < 1\right) = F(1) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393.$$

b)

Az örökifjú tulajdonságot kihasználva

$$\mathbb{P}\left(X > 5 | X > 3\right) = \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = e^{-1} \approx 0,368.$$

3. Egy biztosítónál 10000 ügyfélnek van autó-biztosítása. Az aktuáriusok számításai alapján egy autó 0.025% eséllyel karambolozik egy adott héten, a többitől függetlenül. (Annak esélye, hogy kétszer is karambolozik, elenyésző.)

a.) Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy a jövő héten pontosan 3 káresete keletkezik a biztosítónak? (5 pont)

b.) Közelítőleg mi a valószínűsége, hogy a jövő héten legalább három káreset keletkezik? (5 pont)

Megoldás:

a)

Legyen X az egy héten lévő káresetek száma a biztosítónál. Binomiális eloszlású, $n = 10000$ és $p = 0,00025$ paraméterekkel. Mivel n nagy és p kicsi, úgy hogy a szorzatuk: $\lambda = np = 2,5$ "normális" méretű, ezért Poisson eloszlással közelíthető. (A binomiálissal való végigszámolásért is jár pont, de azért na . . .)

$$\mathbb{P}\left(X = 3\right) \approx \frac{2,5^3}{3!} e^{-2,5} \approx 0,214$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 3) =& 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \\ \approx& 1 - e^{-2,5} + 2,5 \cdot e^{-2,5} - \frac{2,5^2}{2} e^{-2,5} \approx 0,456\end{aligned}$$

4. a.) Pistike nagymamája 20 palacsintát tett az asztalra: 5 kakaósat és 15 lekvárosat. Pistike kivett vaktában hármat, és jóízűen megette. Mi a valószínűsége, hogy (pontosan) két lekváros palacsintát evett meg? (5 pont)

b.) Móricka nagymamája is 5 kakaós és 15 lekváros palacsintát tart az asztalon, azzal a különbséggel, hogy ha valaki egyet elvesz, azt ő a hűtőből azonnal pótolja. Móricka is hármat evett, szépen egyesével, vaktában választva. Mi a valószínűsége, hogy (pontosan) két lekvárosat evett? (5 pont)

Megoldás:

a)

Legyen X a megevett lekváros palacsinták száma! Mivel az asztalon lévő palacsintákat nem pótolják ki, visszatevés nélküli mintavételezéssel van dolgunk, vagyis X hipergeometrikus eloszlású $N = 20, M = 15, n = 3$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{1}}{\binom{20}{3}} \approx 0,461$$

b) Mivel az elfogyasztott palacsinták pótlásra kerülnek, a visszatevéses mintavétel esete áll fenn és X binomiális eloszlású $n = 3, p = \frac{15}{20} = 0,75$ paraméterekkel.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{2} 0,75^2 \cdot 0,25 \approx 0,422$$