Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladatok, 2019 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2019.10.08.)

HF 1.1 Pistike egyszer dob egy szabályos dobókockával. Ezután Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg nem sikerül legalább akkora számot dobnia, mint Pistikének. Legyen X Móricka dobásainak a száma.

a.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

c.) Mennyi az $\mathbb{E}X$ várható érték?

HF 1.2 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi X eloszlása?

2.HF: (Beadási határidő: 2019.10.29.)

HF 2.1 Feldobunk egy 10 és egy 20 forintos érmét egyszerre, és ezt addig ismételgetjük, amíg a 20-ason fej nem jön ki. Jelölje X, hogy ez alatt *a* 10-*essel* hány fejet dobtunk. Számoljuk ki X várható értékét és generátorfüggvényét!

HF 2.2 Egy boltba a vevők egyesével érkeznek, percenként pontosan egy, és beállnak az egyetlen sorba. Amikor sorra kerülnek, a kiszolgálásuk az előzményektől független véletlen ideig tart: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel 0 percig (a vevő csak szétnéz és elmegy, kár is volt sorba állnia), p valószínűséggel 1 percig, és a maradék $\frac{2}{3} - p$ valószínűséggel 2 percig.

A boltba 08:00-kor érkezik az első vevő: nevezzük őt egymagát *nulladik generációnak*. Azokat a vevőket, akik az ő kiszolgálása alatt érkeznek, nevezzük *első generációnak* (lehet, hogy ilyen egy sincs). Azokat a vevőket, akik az első generáció kiszolgálása alatt érkeznek, nevezzük *második generációnak*, stb: Azok a vevők, akik an n-edik első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkeznek, alkotják az $n+1$-edik generációt. Jelölje Z_n az n-edik generáció tagjainak számát.

Az alábbi kérdéseket válaszoljuk meg

I.) ha $p = \frac{1}{2}$,

II.) ha $p = \frac{1}{6}$.

a.) Mennyi $\mathbb{E}Z_0$?

b.) Mennyi $\mathbb{E}Z_{10}$?

c.) Mi Z_0 generátorfüggvénye?

d.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

e.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $Z_3 = 0$?

f.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sor előbb-utóbb elfogy?

g.) Legyen N a sor első elfogyásáig kiszolgált vevők teljes száma (a legelső vevőt is beleértve). Mennyi N várható értéke?

h.) Mi N generátorfüggvénye?

3.HF: (Beadási határidő: 2019.11.12.)

HF 3.1 Pistike 6999-szer dob egy szabályos dobókockával.

a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel segítségével annak a valószínűségét, hogy 1000-nél kevesebb hatost sikerül dobnia!

b.) Legfeljebb mennyi lehet a fenti közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

HF 3.2 Mórickának 1000 szabályos dobókockája van. Mindegyikkel addig dobál, amíg ki nem jön rajta a 6-os. Adjunk nagy eltérés becslést annak a valószínűségére, hogy összesen legalább 7000 dobásra lesz szüksége!

(Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{x}{p} + (1-x) \ln \frac{1-x}{q}$$

(ahol $q = 1-p$ és $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = (x-1) \ln \frac{x-1}{q} - x \ln x - \ln p$$

(ahol $q = 1-p$ és $x > 1$).)

4.HF: (Beadási határidő: 2019.12.03.)

HF 4.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?

h.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

HF 4.2 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

5.HF: (Beadási határidő: 2019.12.18.)

HF 5.1 Móricka és Pistike is büszke arra, hogy dombon lakik. Szeretnék eldönteni, hogy melyikük lakik magasabban. Ehhez egy GPS vevőről olvasták le a tengerszint feletti magasságot, minkettőjük toronyszobájának ablakában. A GPS vevő által jelzett magasság hibával terhelt: a mutatott érték normális eloszlású, aminek várható értéke a tényleges magasság, szórása viszont ismeretlen (de minden mérésnél ugyanaz). Móricka és Pistike mindkét magasságot többször is megmérte különböző időpontokban, így a mérések függetlennek tekinthetők. A következő adatokat mérték (méterben):

Móricka	265	259	266	274	268	268
Pistike	275	267	271	268	261	265

a.) Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Pistike ablaka legalább olyan magasan van, mint Mórickáé!

b.) Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Móricka ablaka legalább olyan magasan van, mint Pistikéé!