(1) a.) ~~K~~lasszikus val-sgi mező, 6^5 lehetőség közül 6 a nyerő

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Yahtzee}) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$$

b.) ~~A~~ függetlenség miatt

$$\mathbb{P}(\text{egy se Yahtzee}) = \left[\mathbb{P}(\text{első nem Yahtzee})\right]^{1000} = \left(1 - \frac{1}{1296}\right)^{1000}$$

c.) Még 2 db 5-öst kell dobni

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Yahtzee} \mid 3 \text{ db 5-ös már megvan}) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

(2) a.) $X \sim Bin(n,p)$ ahol $n = 30$ és $p = 0.05$

$$\Rightarrow g(z) = (q + pz)^n = (0.95 + 0.05z)^{30} \text{ a generátorfv.}$$

b.) $\mathbb{E}X = np = 1.5 > 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\text{kihalás}) < 1$, és számolni kell.

A kihalás val. sége a $z = g(z)$ fixpont-egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása, vagyis a $z = (0.95 + 0.05z)^{30}$ egyenletet kellene megoldanunk. Ez sajnos 30-ad fokú, és még akkor is 29-ed fokú marad, ha a $z = 1$ triviális megoldással egyszerűsítünk. Így nincs más hátra, mint az iterációs közelítés:

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r_\infty = \lim_{n\to\infty} r_n$, ahol $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$. Az első néhány tag:

$r_0 = 0$

$r_1 = (0.95 + 0.05 \cdot 0)^{30} \approx 0.215$

$r_2 = (0.95 + 0.05\, r_1)^{30} \approx 0.301$

$r_3 \approx \left(\frac{19 + r_2}{20}\right)^{30} \approx 0.344$

$r_4 \approx \left(\frac{19 + r_3}{20}\right)^{30} \approx 0.368$

$r_5 \approx 0.381$

$r_6 \approx 0.390$

$r_7 \approx 0.395$

$r_8 \approx 0.398$

$r_9 \approx 0.400$

$r_{10} \approx 0.401$

$r_{11} \approx 0.401$

$r_{12} \approx 0.402$

$\vdots$

$r_\infty \approx 40\%$

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{nem hal ki}) \approx 60\%}$$

(3)

a) Legyen X az első 5 másodpercben érkező autók száma.

Az autók érkezését modellezzük Poisson-folyamattal $\lambda = 20 \frac{1}{perc}$

intenzitással $\Rightarrow X \sim Poi(\lambda \cdot 5sec) = Poi(20 \frac{1}{perc} \cdot 5 \, sec) = Poi(\frac{5 \cdot 20}{60})$

$= Poi(\frac{5}{3})$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{egy se jön}) = \mathbb{P}(X=0) = e^{-\frac{5}{3}} \frac{(\frac{5}{3})^0}{0!} = e^{-\frac{5}{3}}$

b) Poisson-folyamatban a követési idők exponenciálisak λ rátával

$\Rightarrow$ ha T_i az i-edik autó elhaladásáig eltelt idő az $(i-1)$-edik től

mérve, akkor $\mathbb{E}T_i = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{20}\,perc = 3s$

$\Rightarrow \mathbb{E}(T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8) = 5 \cdot \mathbb{E}(T_i) = 15s$

(4) Legyen 1 fitying = 10 000 peták, és számoljunk fityingben!

Legyen X_i az i-edik napon a bankba vitt összeg. Ezek füg-

getlenek, és az eloszlásuk

k	0	2	4
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\Rightarrow m := \mathbb{E}X_i = \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 = 2$

$\sigma^2 := Var\, X_i = \mathbb{E}((X_i - m)^2) = \mathbb{E}((X_i-2)^2) = \frac{1}{8}(0-2)^2 + \frac{3}{4}(2-2)^2 + \frac{1}{8}(4-2)^2 =$

$= \frac{1}{8} \cdot 4 + 0 + \frac{1}{8} \cdot 4 = 1 \Rightarrow \sigma = 1$

$\delta := \mathbb{E}(|X_i - m|^3) = \frac{1}{8}|0-2|^3 + \frac{3}{4}|2-2|^3 + \frac{1}{8}|4-2|^3 = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2^3 = 2$

Legyen $n=25$ és $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ a januárban bankba vitt

összeg.

(4) Folyt.

a.) A CHT szerint S_n közelítőleg $\sim N(n \cdot m, n\sigma^2) = N(50, 25) =$
$= N(50, 5^2)$ [$\underline{\text{szórásnégyzet}}$

$\Rightarrow P(S_n \geq 45) \approx \phi\left(\frac{45-50}{5}\right) = \phi(-1) = 1 - \phi(1)$

$\approx 1 - 0.84 = 0.16 = \underline{16\%}$

(ahol ϕ a standard normális eloszlásfüggvény)

b.) A Berry-Esseen tétel szerint a CHT közelítés hibája legfeljebb

$\text{hiba} = \left| \overset{\text{~~közelítése~~}}{P(S_n \geq 45)} - 0.16 \right| \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{0.4748 \cdot 2}{5 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 0.4748}{10} \approx \frac{1.9}{10}$

$\approx 0.19 = \underline{\underline{19\%}}$

Látható, hogy a CHT becslés ilyen kicsi n esetén nem nagyon jó semmire.

5

Legyen $X(t) \in S = \{\text{jAnosi}, \text{jUliská}\} = \{A, U\}$ a kiválasztott energia-csomag helye t ~~másod~~perc elteltével. A szöveg szerint ez folytonos idejű Markov lánc $\lambda_{UA} = \lambda_{AU} = 3$ ~~két~~ ugrási rátákkal — a gráf-reprezentáció

$$A \underset{3}{\overset{3}{\rightleftarrows}} U$$

[Vagyis ez egy ON-OFF folyamat].

Az eloszlás t perc elteltével $\pi(t) = (\pi_A(t) \;\; \pi_U(t))$, a kezdeti eloszlás $\pi(0) = \left(\frac{6}{10} \;\; \frac{4}{10}\right)$.

~~a)~~ Az infinitezimális generátor $G = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

a.) $\pi(t)$ időfejlődését a $\dot{\pi}(t) = \pi(t) G$ diff-egyenlet-rendszer írja le:

$$\begin{cases} \dot{\pi}_A(t) = -3\pi_A(t) + 3\pi_U(t) \\ \dot{\pi}_U(t) = 3\pi_A(t) - 3\pi_U(t) \end{cases}$$

Persze, ha kihasználjuk, hogy $\pi_A(t) = 1 - \pi_U(t)$, akkor ez a két egyenlet ugyanarra a közönséges diff. egyenletre vezet:

$$\boxed{\dot{\pi}_A(t) = -3\pi_A(t) + 3(1 - \pi_A(t)) = 3 - 6\pi_A(t)}$$

b.) A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, továbbá $t = 10$ perc hosszú idő $\Rightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint $\pi(10) \approx \pi$, az egyetlen stacionárius eloszlás. A szimmetria miatt persze $\pi = \left(\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right)$ egyenletes $\Rightarrow$ 10 perc után a csomagok kb fele lesz Juliskánál.