

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

minta vizsga, 2023 ősz

A vizsga 5 feladatból fog állni, a munkaidő 90 perc.

Minden feladat SZÁMOLÁSI feladat lesz: hasonló a gyakorló feladatsor feladataihoz. A ZH utáni témakörök – vagyis a 7. ...10. fejezetek anyaga – nagyobb súllyal szerepel, de a teljes anyagból lehetnek feladatok.

Természetesen a feladatok NEM fognak megegyezni a gyakorló feladatokkal.

Mivel 5-nél jóval több feladattípus van, sorsolással dől el, hogy melyik típusok szerepelnek.

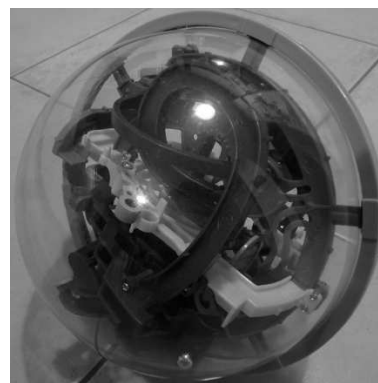
Egy lehetséges példa:

1. Egy boltban minden vevő kiszolgálása pontosan egy percig tart. Ez alatt véletlen számú újabb vevő érkezik, és beállnak a sorba. Az egyes vevők kiszolgálása alatt érkező új vevők száma független és azonos, $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlású.

A legelső vevő Pistike, nevezzük őt egymagát a vevők „nulladik generáció”-jának. Az ő kiszolgálása alatt érkező vevők legyenek az „első generáció”. Az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkezők alkossák a vevők „második generáció”-ját, stb. Az n -edik generációba tartozó vevők számát jelöljük Z_n -nel ($n = 0, 1, 2, \dots$).

- (a) Vegyük észre, hogy Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mi az egylépéses utódszámeloszlás generátorfüggvénye és várható értéke?
- (b) Mennyi Z_{10} várható értéke?
- (c) Mi Z_3 generátorfüggvénye?
- (d) Számoljuk ki a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$, $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ és $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűségeket.
- (e) A boltos akkor tarthat pihenőt, ha egyszer csak üres lesz a sor. Vegyük észre, hogy ez pontosan akkor következik be, ha valamelyik generáció már üres – vagyis az elágazó folyamat kihál. Mi annak a valószínűsége, hogy ez előbb-utóbb bekövetkezik?
- (f) Mennyi a boltos első pihenőjéig kiszolgált összes vevő számának várható értéke?
- (g) **Bónusz feladat:** Mi a válasz a 1e kérdésre, ha a fenti $\lambda = \frac{3}{4}$ helyett $\lambda = 2$?

2. Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet előlről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.



Magical Intellect Ball

- a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.
- b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

- c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?
3. Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörtek élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$ -vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.
- a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). (*Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük valamelyik?*)
- b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!
- c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?
- d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?
- e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?
4. Mintát vettünk egy X normális eloszlású valószínűségi változóból, melynek várható értéke *ismert*: $m = 1000$, de szórása ismeretlen. Azt kaptuk, hogy 997, 1002, 998, 1003, 996, 1001, 998, 1004, 1005. Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására.
5. Egy újonnan kifejlesztett müzli ötféle magot (A, B, C, D és E) tartalmaz, melyek százalékos megoszlása a terméken lévő tájékoztató szerint 35%, 20%, 25%, 10%, illetve 10%. Egy véletlenül kiválasztott zacskóban az alábbi mennyiségi megoszlást találtuk:

Összetevő	A	B	C	D	E
darabszám	552	300	435	189	204

Döntsön 90%-os szinten arról, hogy a minta összetétele megfelel-e a csomagoláson feltüntetettnek!