Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
minta ZH, 2023 ősz

Az egyetlen ZH 5 feladatból fog állni, a munkaidő 90 perc.

Minden feladat SZÁMOLÁSI feladat lesz: hasonló a gyakorló feladatsor feladataihoz AZ ELSŐ 6 TÉMAKÖRBŐL.

Természetesen a feladatok NEM fognak megegyezni a gyakorló feladatokkal.

Mivel 5-nél jóval több feladattípus van, sorsolással dől el, hogy melyik típusok szerepelnek.

Egy lehetséges példa:

1. Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

   a.) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*

   b.) Mennyi Y várható értéke?

2. Móricka az egyetemi órák látogatásának egészségügyi kockázatairól ír egy kamu lánclevelet, és elküldi 10 ismerősének a nulladik napon. A levélben benne van, hogy a címzett küldje tovább újabb 10 embernek. A levelet a címzettek egymástól függetlenül 90% valószínűséggel olvasatlanul törlik, ám a maradék 10% valószínűséggel tényleg továbbküldik 10 embernek, a következő napon.

   a.) Várhatóan hányan küldenek levelet a harmadik napon?

   b.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb senki nem küldi tovább a levelet?

   c.) Mennyi a levelet továbbküldő emberek számának várható értéke?

3. Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

   b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

   c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

4. Egy béka a számegyenesen ugrál. A nullából indul, majd minden másodpercben ugrik egyet: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egy egységnyit jobbra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig egy egységnyit balra – az előzményektől függetlenül. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 150 ugrás után legalább 10 egységnyivel jutott jobbra. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstanst vehetjük 0.4748-nak.)*

5. Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint $2,5$ órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).}$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$