Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
gyakorló feladatok, 2023 ősz

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás alapok

1.1 Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X-szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y-nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:
Jelöljük m-mel egyetlen kockadobás eredményének várható értékét, vagyis $m = \frac{7}{2}$. A teljes várható érték tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{E}(Y|X = k) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k)\,[km] = \\ &= \left[\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) \cdot k\right] m = m \cdot m = \frac{7}{2}\frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25\end{aligned}$$

1.2 Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3\ldots$-re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim Bin(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(Tipp: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.*)*

Megoldás:

Lényeg, hogy $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Mivel az $n \to \infty$ eset érdekel, feltehetjük, hogy $n > k$. Így

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

előre hozzuk, ami látványosan nem függ n-től

$$\frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ db}}} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

van egy csomó tényező, ami 1-hez tart

$$\frac{\lambda^k}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \to$$

$$\underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \ldots 1}, \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}, \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \to 1$$

mindegyik 1-hez tart és véges (rögzített) sokan vannak

az alap 1-hez tart, a kitevő fix

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{k \text{ db}} e^{-\lambda} 1^k = \boxed{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}$$

Hát persze: nagy n-re (és rögzített k-ra) és kicsi p-re a binomiális eloszlás Poissonnal közelíthető.

1.3 Pistikééék padlásán egy villanykörte van felszerelve, aminek az élettartama exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. Pistike csak évente kétszer megy fel a padlásra: december 23-án a karácsonyfadíszekért, illetve január 23-án, eltenni a karácsonyfadíszeket.

Legutóbb, amikor Pistike december 23-án felment, azt vette észre, hogy az égőt felkapcsolva felejtette (nyilván január 23-án, amikor legutóbb ott járt), de már kiégett. Mi annak a valószínűsége, hogy az égő több, mint fél évet világított feleslegesen?

Megoldás: Legyen X a villanykörte élettartama. Hónapokban számolva X eloszlása $Exp(1/12)$, kihasználva, hogy az exponenciális eloszlás paramétere a várható érték (1 év = 12 hónap) reciprokával egyezik meg.

Az exponenciális eloszlás örökifjúsága miatt feltehetjük, hogy januárban hagyta felkapcsolva. A kérdéses valószínűség:

$$\mathbb{P}\left(X > 6 | X < 11\right) = \frac{\mathbb{P}(6 < X < 11)}{\mathbb{P}(X < 11)} = \frac{(1 - e^{-11/12}) - (1 - e^{-6/12})}{1 - e^{-11/12}} = \frac{e^{5/12} - 1}{e^{11/12} - 1}$$

1.4 Pistike minden nyári este tesz egy sétát, és közben az eget nézi, hullócsillagokat figyelve. Egy este átlagosan 4-et szokott látni. Ennek megfelelően, ha 4-et vagy többet lát, akkor vidáman megy haza, ha viszont kevesebbet, akkor bánatosan.

Pistike augusztus 16-án bánatosan ment haza. Ezt tudva, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen hullócsillagot sem látott?

(Rávezető kérdés: Legyen X a Pistike által augusztus 16-án látott hullócsillagok száma - ami persze egy valószínűségi változó. Mi X eloszlása? Pontosabban: Milyen eloszlással jó modellezni X-et?)

Megoldás: X-et Poisson eloszlással modellezzük, mert nagyon sok meteor próbálkozik azzal, hogy pont Pistike szeme láttára égjen el aznap este, és mindegyik kis valószínűséggel jár sikerrel, egymástól függetlenül. X pedig a sikeres próbálkozások száma. A szöveg szerint $\mathbb{E}X = 4$, így $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = 4$. Vagyis minden $k = 0, 1, 2, \ldots$-re

$$p_k := \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4}\frac{4^k}{k!}.$$

Így a kérdésre a válasz a feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0 | X < 4) &= \frac{\mathbb{P}(X = 0 \text{ és } X < 4)}{\mathbb{P}(X < 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(X < 4)} = \frac{p_0}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3} = \\ &= \frac{e^{-4}}{e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6}\right)} = \frac{3}{71} \approx 0.042 = 4.2\%. \end{aligned}$$

2. Generátorfüggvény-módszer

2.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?

(b) Mennyi X várható értéke?

(c) Mennyi X szórása?

(d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

Megoldás:

(a) Minden genarátorfüggvényre igaz, hogy $g(1) = 1$, ezért

$$g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + c \cdot 1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + c = 1,$$

amiből $c = \frac{1}{8}$. Ebből

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3$$

(b) Mint mindig, $\mathbb{E}X = g'(1)$. Ehhez

$$g'(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2z + \frac{1}{8} \cdot 3z^2,$$

amiből

$$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{11}{8} = 1.375.$$

(c) Mint mindig, $\mathbf{D}^2X = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$. Ehhez

$$g''(z) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}z,$$

amiből $g'(1) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$, amiből

$$\mathbf{D}^2X = \frac{3}{2} + \frac{11}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{96 + 88 - 121}{64} = \frac{63}{64}.$$

Ebből

$$\mathbf{D}X = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.99$$

(d) Mint mindig, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{g''(0)}{2!}$. Esetünkben $g''(0) = \frac{3}{4}$, amiből

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\frac{3}{4}}{2!} = \frac{3}{8}.$$

Alternatív megoldás: A generátorfüggvényből kiolvasható X eloszlása: $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ jelöléssel

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3,$$

amiből $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = c$, és a többi k-ra $p_k = 0$. Így persze

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ miatt $c = \frac{1}{8}$.

(b) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$.

(c) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$. Emiatt

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{23}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{63}{64},$$

amiből

$$\mathbf{D}X = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.99$$

(d) $\mathbb{P}(X = 2) = p_2 = \frac{3}{8}$.

2.2 Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X szórása?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

Megoldás: InfoMSC-MatD-HFmegoldasok-2014tavasz

2.3 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

a.) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*

b.) Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:

a.) Jelölje N a kockával dobott számot, X_k pedig az k-adik érmedobás során a „fej” indikátorát, vagyis

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik dobás fej,} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}.$$

Így $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg, és generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = g_N(g_X(z)),$$

ahol

$$g_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) z^k = \frac{1}{6} z^1 + \frac{1}{6} z^2 + \cdots + \frac{1}{6} z^6 = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}{6}$$

az N generátorfüggvénye és

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k = \frac{1}{2} z^0 + \frac{1}{2} z^1 = \frac{1+z}{2}$$

az X_k-k közös generátorfüggvénye. Összesítve:

$$g_Y(z) = \frac{\frac{1+z}{2} + \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^6}{6}.$$

b.) Mivel $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg,

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}N\mathbb{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{7}{4}.$$

Ugyanez, persze, kiszámolható sokkal több munkával is mint $\mathbb{E}Y = g_Y'(1)$.

2.4 Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X-re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!”. Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i-edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

1. megoldás, a segítség szerint:
Móricka egy „kísérlete” álljon azokból a dobásokból, amíg sikerül neki egy 6-ost dobni, *és még az azt követő dobásból*. Ha ez az utolsó dobás 6-os, akkor vége, ha pedig nem 6-os, akkor jön a következő kísérlet. Jelölje Y_i az i-edik kísérlet hosszát. Így

$$X = \sum_{i=i}^{N} Y_i,$$

Y_i pedig 1-gyel több, mint a hatos megdobásához szükséges dobások száma, vagyis $Y_i = Z_i + 1$, ahol Z_i geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel (hagyományos optimista geometriai eloszlás), és $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ függetlenek egymástól és N-től is.

A Z_i-k generátorfüggvénye

$$g_Z(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{1 - \frac{5}{6}z} = \frac{z}{6-5z},$$

az Y_i-k generátorfüggvénye ennek z-szerese:

$$g_Y(z) = \frac{z^2}{6-5z}.$$

Az N maga is geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így generátorfüggvénye

$$g_N(z) = g_Z(z) = \frac{z}{6-5z}.$$

A véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{\frac{z^2}{6-5z}}{6 - 5\frac{z^2}{6-5z}} = \frac{z^2}{36-30z-5z^2}.$$

A várható értéket számolhatnánk ennek deriválásával, de azt is tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+1\right) = 6 \cdot 7 = 42.$$

2. megoldás, tök másképp (jobb, általánosítható megoldás):
Legyen g az X generátorfüggvénye, g_1 pedig a hátralévő dobások számának (X_1-nek) a generátorfüggvénye akkor, ha a legutóbbi dobás 6-os volt, de az azelőtti nem. Ezek között keresünk összefüggéseket a teljes várható érték tétellel.

g-re felírunk egy teljes várható érték tételt aszerint, hogy mi az első dobás eredménye. Ha 6-ost dobunk, akkor még X_1 dobás van hátra, ha pedig mást, akkor kezdődik minden elölről:

$$\mathbb{E}(z^X) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^X \,|\, 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^X \,|\, \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^{1+X_1}) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

ahol X' azonos eloszlású X-szel. Így

$$g(z) = \frac{1}{6}zg_1(z) + \frac{5}{6}zg(z). \tag{1}$$

Ugyanígy felírjuk a teljes várható érték tételt g_1-re is a soron következő dobás eredménye szerint. Ha 6-ost dobunk, akkor vége, ha pedig mást, akkor kezdődik minden elölről:

$$\mathbb{E}(z^{X_1}) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^{X_1} \,|\, 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^{X_1} \,|\, \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^1) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

vagyis

$$g_1(z) = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z). \tag{2}$$

A (2) egyenletet (1)-be visszaírva

$$g(z) = \frac{1}{6}z\left[\frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z)\right] + \frac{5}{6}zg(z),$$

amit megoldva

$$g(z) = \frac{\frac{1}{36}z^2}{1 - \frac{5}{6}z - \frac{5}{36}z^2} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható érték ennek deriválásával kapható meg:

$$g'(z) = \frac{72z - 30z^2}{(36 - 30z - 5z^2)^2}, \quad \text{így} \quad \mathbb{E}X = g'(1) = 42.$$

2.5 Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) X generátorfüggvényét,

b.) X várható értékét,

c.) X szórását.

Megoldás:
Jelöljük N-nel a dobások számát, az utolsó 6-ost nem beleértve, vagyis $X \sim PessGeom(p = \frac{1}{6})$ (pesszimista geometriai). Így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{1}{6-5z}$ (a szokásos $q = 1 - p$ jelöléssel).

A keresett Y egy *véletlen tagszámú összeg*, éppen N taggal: $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, ahol $Y_1, Y_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig egyenletes eloszlásúak az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazon. (*Figyelem*: az Y_i-k tényleg az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazon egyenletesek, és *nem* az $\{1,2,3,4,5,6\}$-on, mert az Y_i eloszlása egy kockadobás eredményének *feltételes eloszlása* azon feltétel mellett, hogy az eredmény nem 6-os.)

Ezek szerint az Y_i-k generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5}{5} = \frac{1}{5}\frac{z - z^6}{1 - z},$$

így

a.) a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_X = g_N \circ g_Y$, vagyis

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6 - (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)} = \frac{1}{6 - \frac{z-z^6}{1-z}}.$$

b.) A várható értéket számolhatnánk a generátorfüggvény deriválásával is, de előadásról azt is tudjuk, hogy a véletlen tagszámú összegre $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, $\mathbb{E}Y_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, vagyis $\mathbb{E}X = 5 \cdot 3 = 15$.

c.) A szórást megint csak számolhatnánk a generátorfüggvény deriváltjaiból, de előadásról azt is tudjuk, hogy $D^2X = D^2N(\mathbb{E}Y_i)^2 + \mathbb{E}ND^2Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = 5$, $\mathbb{E}Y_i = 3$, továbbá az eloszlástáblázat szerint $D^2N = \frac{q}{p^2} = 30$ és $D^2Y_i = \frac{5^2-1}{12} = 2$. Így $D^2X = 30 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2 = 280$, $DX = \sqrt{280} \approx 16.73$.

2.6 Legyen $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

N generátorfüggvénye $g_N(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$

Az X_i-k generátorfüggvénye $g_X(z) = \dfrac{qz}{1-(1-q)z}$

$\xrightarrow[\text{volt}]{\text{tétel}}$ S_N generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{p\,\frac{qz}{1-(1-q)z}}{1-(1-p)\frac{qz}{1-(1-q)z}} \;\xlongequal[{[1-(1-q)z]\text{-vel}}]{\text{bővítem}}$$

$$= \frac{pqz}{1-(1-q)z-(1-p)qz} = \frac{pqz}{1-[1-\cancel{q}+\cancel{q}-pq]z},$$

amiből látszik, hogy $\boxed{S_N \sim Geom(pq)}$

Hát persze: Móricka hamis dobókockáján a 6-os val-sége p, Pistikéén pedig q. Addig dobálják a két kockát egyszerre, amíg ki nem jön a 6-os mindkettőn egyszerre. Legyen N, hogy hányszor kiált fel ~~Móricka~~ Pistike, hogy „Nekem ~~már~~ megvan"! Legyen X_i az i-edik ilyen „részsikerhez" szükséges dobások száma. Látszik, hogy $N \sim Geom(p)$ és $X_i \sim Geom(q)$ függetlenek, és a játék teljes hossza S_N.

2.7 a.) Legyen $X \sim PesszGeom(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\mathbb{V}arY$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim Geom(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\mathbb{V}arZ$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

a.) $k = 0, 1, 2 \ldots$ -re $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^k p \overset{q:=1-p}{=\!=} q^k p$,

így X generátorfüggvénye

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k \underset{\text{sor}}{\overset{\text{mértani}}{=\!=}}$$

$$= p \frac{1}{1-qz} = \underline{\underline{\frac{p}{1-qz}}} = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

Ebből $g_X'(z) = \left[p(1-qz)^{-1}\right]' = -p(1-qz)^{-2}(-q) = \frac{pq}{(1-qz)^2}$

$$g_X''(z) = \left[pq(1-qz)^{-2}\right]' = -2pq(1-qz)^{-3}(-q) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}$$

$\Rightarrow$ $g_X'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \underline{\underline{\frac{1}{p} - 1}}$

$$g_X''(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \underline{\underline{\frac{2q^2}{p^2}}}$$

Ebből $\boxed{\mathbb{E}X = g_X'(1) = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1}$

$\boxed{\mathbb{V}ar\,X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left[g_X'(1)\right]^2} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2 + qp - q^2}{p^2}$

$$= \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \boxed{\frac{q}{p^2}}$$

b.) $\mathbb{E}X=1$, $\mathbb{E}X^2=1$, ebből $\mathbb{V}ar\,X=0$, hát persze.

c) $\boxed{\mathbb{E}Z=\mathbb{E}(X+1)=\mathbb{E}X+\mathbb{E}Y=\left(\frac{1}{p}-1\right)+1=\frac{1}{p}}$

$\boxed{\mathbb{V}ar\,Z=\mathbb{V}ar(X+Y)=\mathbb{V}ar\,X+\mathbb{V}ar\,Y,}$ MERT X ÉS Y FÜGGETLENEK

$$=\frac{q}{p^2}+0=\boxed{\frac{q}{p^2}}$$

Hát persze: az $Y\equiv 1$ determinisztikus, így minden val. változótól független.

[Megj.: Ez így könnyebb, mint $g_Z(z)=\dfrac{pz}{1-qz}$-t kétszer lederiválni.]

2.8 Legyen $X\sim Poi(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2,\dots$-re, ezért

X generátorfüggvénye

$$\underline{\underline{g_X(z)}} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} =$$

$$\underset{\text{definíció szerint}}{=\!=\!=} e^{-\lambda} e^{\lambda z} = \underline{\underline{e^{\lambda(z-1)}}}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Ebből $g_X'(z) = \lambda e^{\lambda(z-1)} \Rightarrow g_X'(1) = \lambda$

$$g_X''(z) = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \Rightarrow g_X''(1) = \lambda^2$$

tehát $\boxed{\mathbb{E}X = g_X'(1) = \lambda}$

$$\boxed{\mathrm{Var}\,X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left[g_X'(1)\right]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda}$$

[Amiből persze a szórás $\sqrt{\mathrm{Var}\,X} = \sqrt{\lambda}$.]

2.9 Legyenek $N \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ és $X_1, X_2, \dots \sim B\left(\frac{1}{3}\right)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

$N \sim Bin(10, \frac{1}{2})$, ezért N generátorfüggvénye

$$g_N(z) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z\right)^{10} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} z\right)^{10}.$$

$X_1, X_2, \ldots \sim B(\frac{1}{3})$, ezért a közös generátorfüggvényük

$$g_X(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} z.$$

Ebből a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} z\right]\right)^{10} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6} z\right)^{10},$$

ami éppen a $Bin(10, \frac{1}{6})$ eloszlás generátorfüggvénye,

tehát $S_N \sim Bin(10, \frac{1}{6})$.

[Hát persze: 10-szer feldobunk egy szabályos érmét. Amikor az eredmény „fej", eldobunk egy szabályos dobókockát *is*, és megnézzük, hogy sikerül-e *páros* számot dobni. $X_i := \begin{cases} 1, \text{ ha az } i\text{-edik kockadobás páros} \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}$

$N :=$ a dobott fejek száma.

Így S_N a dobott páros számok száma, persze $\sim Bin(10, \frac{1}{6})$.]

2.10 Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \ldots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0,1)$-re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0,1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0,1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

Megoldás:

$$g(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + \dots$$

$$g'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \dots$$

$$g''(z) = 2p_2 + 3\cdot 2\cdot p_3 z + 4\cdot 3\cdot p_4 z^2 + \dots$$

Mivel $p_2, p_3, p_4 \dots \geq 0$, ezért $z > 0$ esetén $g''(z)$ csak úgy lehet nulla, ha $p_2 = p_3 = p_4 = \dots = 0$.

Vagyis p_0 és p_1 kivételével minden p_k-nak nullának kell lenni, hogy $g''(z) = 0$ lehessen.

~~Ah~~ Ezek persze pontosan akkor nullák, ha X csak 0 vagy 1 lehet, vagyis Bernoulli eloszlású.

Röviden: $g(z)$ szigorúan konvex $[0,1]$-en, hacsak nem $X \sim B(p)$ valamilyen $p \in [0,1]$-re, mely esetben persze $g(z)$ lineáris vagy konstans.

3. Galton-Watson folyamat

3.1 Mócika, népes családjában, pilótajátékot szervez. A játék résztvevői nem túl kitartóak: minden egyes résztvevő addig próbál újabb és újabb résztvevőket beszervezni, amíg először kudarc nem éri (vagyis vissza nem utasítják), az első kudarc után viszont leáll. A kudarc valószínűsége pedig minden egyes beszervezési kísérletnél p, az előzményektől függetlenül.

A játék első résztvevője Móricka, ő alkotja egyedül a nulladik generációt. Az első generációt a Móricka által (közvetlenül) beszervezettek alkotják, a második generációt az első generáció tagjai által beszervezettek, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \ldots$), N pedig a teljes játék össz-résztvevőszámát (vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{2}{3}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{3}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a játék előbb-utóbb elakad (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)?

e.) Mennyi N várható értéke?

f.) Mi N generátorfüggvénye?

Megoldás:

Z_k elágazó folyamat, amiben az egylépéses utódszám (X) – vagyis az egy résztvevő által beszervezettek száma – pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel: $\mathbb{P}(X = k) = q^k p$ ($k = 0, 1, \ldots$), ahol $q = 1 - p$. Ennek generátorfüggvénye $g(z) = \frac{p}{1-qz}$, várható értéke $m := \mathbb{E}X = \frac{1}{p} - 1$.

I. $p = \frac{2}{3}$ esetén $m = \frac{1}{2}$, $g(z) = \frac{2}{3-z}$.

a.) $g_{Z_2}(z) = g(g(z)) = \frac{2}{3-\frac{2}{3-z}}$

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = \frac{1}{1024}$

c.) $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = g(g(g(0)))$. Esetünkben $g(0) = \frac{2}{3}$, $g(\frac{2}{3}) = \frac{6}{7}$, $g(\frac{6}{7}) = \frac{14}{15}$, vagyis $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = \frac{14}{15}$.

d.) Mivel $m < 1$, az elágazó folyamat szubkritikus, ezért $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$.

e.) $\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}Z_k = \sum_{k=0}^{\infty} m^k$. Jelen esetben $m < 1$, ezért a sor felősszegezhető, $\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1-m} = 2$.

f.) Előadásról tudjuk, hogy a $G = g_N(z)$ generátorfüggvény eleget tesz a $G = zg(G)$ egyenletnek, ahol g(z) még mindig az egylépéses utódszám generátorfüggvénye, vagyis $g(z) = \frac{2}{3-z}$. Meg kell tehát oldani a $G = z\frac{p}{1-qG}$ egyenletet G-re. Ez átszorzás és átrendezés után másodfokúra vezet: $0 = qG^2 - G + pz$, aminek a két megoldása $G = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqz}}{2q}$. Hogy a kettő közül melyik az igazi generátorfüggvény, azt eldönthetjük pl. a generátorfüggvény azon alaptulajdonsága alapján, hogy $g_N(0) = \mathbb{P}(N = 0)$. Esetünkben $N \geq 1$, mivel a játéknak Móricka személyében legalább egy résztvevője biztosan van, így $g_N(0) = \mathbb{P}(N = 0) = 0$, aminek a két gyök közül a „-"-os tesz eleget. Vagyis

$$g_N(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} z}}{2 \cdot \frac{1}{3}}.$$

II. $p = \frac{1}{3}$ esetén $m = 2$, $g(z) = \frac{1}{3-2z}$.

a.) $g_{Z_2}(z) = g(g(z)) = \frac{1}{3-2\frac{1}{3-2z}}$

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = 1024$

c.) $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = g(g(g(0)))$. Esetünkben $g(0) = \frac{1}{3}$, $g(\frac{1}{3}) = \frac{3}{7}$, $g(\frac{3}{7}) = \frac{7}{15}$, vagyis $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = \frac{7}{15}$.

d.) A kihalás valószínűsége a $z = g(z)$ egyenlet legkisebbik (nemnegatív) gyöke. (Mivel $m > 1$, az elágazó folyamat szuperkritikus, ezért előre tudjuk, hogy ez 1-nél kisebb. Azt is tudjuk előre, hogy $z = 1$ gyök lesz, mert $g(1) = 1$ minden generátorfüggvényre, de mi most nem ezt a gököt keressük.) Meg kell tehát oldani a $z = \frac{1}{3-2z}$ egyenletet. Ez átszorzás és átrendezés után másodfokúra vezet: $0 = 2z^2 - 3z + 1$, aminek a gyökei $\frac{1}{2}$ és 1. A kihalás valószínűsége tehát ezek közül a kisebbik: $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = \frac{1}{2}$.

e.) $\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}Z_k = \sum_{k=0}^{\infty} m^k$. Jelen esetben $m > 1$, ezért a sor divergens, $\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = \infty$. Ezt persze onnan is lehetett tudni, hogy $m > 1$ miatt a folyamat szuperkritikus, vagyis pozitív valószínűséggel sose hal ki, vagyis pozitív valószínűséggel $N = \infty$.

f.) Mivel $m > 1$, a folyamat szuperkritikus, és pozitív valószínűséggel $N = \infty$. Vagyis az N most elfajult, és nem is igazi val-változó. Ilyeneknek a generátorfüggvényéről nem beszéltünk, és ne is erőltessük.

3.2 Egy atomreaktorban sok olyan atommag van, ami maghasadásra képes, ha egy neutron eltalálja. Egy, a reaktorba bekerülő neutron sorsa kétféle lehet:

i.) Kirepül a reaktorból, vagy elnyelődik (pl. egy nem hasadó atommagban) anélkül, hogy hasadást okozna - és ezzel elvész a láncreakció számára. Ennek valószínűsége legyen p.

ii.) Egy hasadásra képes magot eltalálva hasadást okoz. Ő maga elnyelődik, helyette a hasadás során véletlen számú másik neutron szabadul fel: 1, 2 vagy 3, azonos (vagyis $\frac{1-p}{3}$) valószínűséggel.

Az egyes neutronok sorsa független egymástól és az előzményektől. A p paraméter értéke a reaktor méretének és alakjának változtatásával (vagyis szabályozórudak mozgatásával) állítható.

Belövünk a reaktorba egyetlen neutront – legyen ez egymaga a „nulladik generáció”. Az „első generáció” álljon a legelső neutron által okozott hasadás során létrejövő neutronokból (ha van ilyen). A „második generáció” álljon az első generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból. És így tovább, az $n+1$-edik generáció álljon az n-edik generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból, $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemeinek számát. Legyen $X = Z_1$, és legyen $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ a láncreakcióban résztvevő neutronok össz-száma.

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I.) ha $p = \frac{5}{8}$

II.) ha $p = \frac{1}{4}$.

a.) Mi X eloszlása?

b.) $\mathbb{E}X =$?

c.) Mi X generátorfüggvénye?

d.) $\mathbb{E}Z_{20} = ?$

e.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

f.) $\mathbb{E}N = ?$

g.) $\mathbb{P}(Z_4 = 0) = ?$

h.) Mennyi a valószínűsége, hogy a láncreakció előbb-utóbb leáll, vagyis hogy valamelyik generáció már üres?

Megoldás:

I.) a.)

k	0	1	2	3
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b.) $m := \mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

c.) X generátorfüggvénye $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{5}{8}z^0 + \frac{1}{8}z^1 + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3 = \frac{5+z+z^2+z^3}{8}$.

d.) $\mathbb{E}Z_{20} = m_{20} = m^{20} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \approx 0.00317$.

e.) Z_2 generátorfüggvénye

$$g_2(z) = g(g(z)) = \frac{5 + \frac{5+z+z^2+z^3}{8} + \left(\frac{5+z+z^2+z^3}{8}\right)^2 + \left(\frac{5+z+z^2+z^3}{8}\right)^3}{8}.$$

f.) Mivel $m < 1$ (a folyamat szubkritikus), $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

g.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ sorozatról tudjuk, hogy eleget tesz az $r_{n+1} = g(r_n)$ rekurziós szabálynak $r_0 = 0$ kezdeti értékkel. Így az r_n-ek egyesével számolhatók:

- $r_0 = 0$
- $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{5}{8}$
- $r_2 = g(r_1) = g(\frac{5}{8}) \approx 0.78247$
- $r_3 = g(r_2) \approx 0.859226$
- $r_4 = g(r_3) \approx 0.90398$.

h.) $m < 1$, vagyis a folyamat szubkritikus (és nem elfajult, vagyis $\mathbb{P}(X = 1) \neq 1$), ezért a kihalás valószínűsége $r_\infty = 1$.

II.) a.)

k	0	1	2	3
$p_k = \mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b.) $m := \mathbb{E}X = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

c.) X generátorfüggvénye $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{4}z^0 + \frac{1}{4}z^1 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 = \frac{1+z+z^2+z^3}{4}$.

d.) $\mathbb{E}Z_{20} = m_{20} = m^{20} = \left(\frac{3}{2}\right)^{20} \approx 3325$.

e.) Z_2 generátorfüggvénye

$$g_2(z) = g(g(z)) = \frac{1 + \frac{1+z+z^2+z^3}{4} + \left(\frac{1+z+z^2+z^3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1+z+z^2+z^3}{4}\right)^3}{4}.$$

f.) Mivel $m \geq 1$, $\mathbb{E}N = \infty$.

g.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ sorozatról tudjuk, hogy eleget tesz az $r_{n+1} = g(r_n)$ rekurziós szabálynak $r_0 = 0$ kezdeti értékkel. Így az r_n-ek egyesével számolhatók:

- $r_0 = 0$
- $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{1}{4}$
- $r_2 = g(r_1) = g(\frac{1}{4}) \approx 0.33203$
- $r_3 = g(r_2) \approx 0.36972$
- $r_4 = g(r_3) \approx 0.38924$.

h.) $m > 1$, vagyis a folyamat szuperkritikus, ezért számolni kell: a kihalás valószínűsége a $z = g(z)$ fixpont-egyenlet egyetlen $[0, 1)$-beli megoldása. Vagyis meg kell oldani a

$$z = \frac{1 + z + z^2 + z^3}{4}$$

egyenletet, ami nullára redukálva

$$z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0.$$

Ez első ránézésre ijesztő harmadfokú, de szerencsére tudjuk, hogy $g(1) = 1$ mindig, így $z = 1$ mindig megoldás. Vagyis a baloldalból $z - 1$ kiemelhető. És valóban:

$$z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z - 1)(z^2 + 2z - 1),$$

tehát az egyenletünk

$$(z - 1)(z^2 + 2z - 1) = 0.$$

Ebből $z - 1 = 0$ vagy $z^2 + 2z - 1 = 0$. Ez utóbbi már csak másodfokú, megoldásai $z = -1 \pm \sqrt{2}$.
Összefoglalva: a $z = g(z)$ fixpontegyenlet megoldásai $-1 - \sqrt{2}$, $-1 + \sqrt{2}$ és 1. Ezek közül pontosan egy esik a $[0, 1)$ intervallumba (ahogy annak lenni kell), és ez a kihalási valószínűség:

$$r_\infty = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = -1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$$

3.3 Móricka az egyetemi órák látogatásának egészségügyi kockázatairól ír egy kamu lánclevelet, és elküldi 10 ismerősének a nulladik napon. A levélben benne van, hogy a címzett küldje tovább újabb 10 embernek. A levelet a címzettek egymástól függetlenül 90% valószínűséggel olvasatlanul törlik, ám a maradék 10% valószínűséggel tényleg továbbküldik 10 embernek, a következő napon.

a.) Várhatóan hányan küldenek levelet a harmadik napon?

b.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb senki nem küldi tovább a levelet?

c.) Mennyi a levelet továbbküldő emberek számának várható értéke?

Megoldás: Legyen Z_n az n-edik napon levelet küldő emberek száma. *(Vagyis nem az az érdekes, hogy hány levelet küld – aki küld, az úgyis pont 10-et küld, – hanem, hogy hány embert fertőz meg a lánclevél-küldés.)* Ez a Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mindenki $n = 10$ embert próbál megfertőzni, és minden próbálkozás $p = \frac{1}{10}$ valószínűséggel sikeres, így a közvetlen utódok számának várható értéke $m = 1$.

(Konkrétan az egylépéses utódszámeloszlás $X \sim Bin(n, p) = Bin(10, \frac{1}{10})$, de ez most nekünk csak annyiban kell, hogy $m = np = 1$.)

Ezért

a.) $\mathbb{E}Z_3 = m^3 = 1$.

b.) $m = 1$, vagyis a folyamat kritikus (és nem elfajult). Ezért a kihalás valószínűsége 1.

c.) A folyamat kritikus, ezért a teljes létszám várható értéke $\mathbb{E}N = \infty$.

3.4 Egy számítógépes programban egy véletlen, rekurzív rutin fut: minden egyes részfolyamat egységnyi időt vesz igénybe, ám ezen felül minden részfolyamat véletlen számú, önmagával megegyező al-folyamatot indít. Az így indított al-folyamatok száma 0, 1 vagy 2 lehet, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{3}$ és $p_2 = \frac{2}{3} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

Kezdetben egyetlen „gyökér" folyamat fut, ez alkotja egyedül a nulladik generációt. Az első generációt a „gyökér" által (közvetlenül) indított alfolyamatok alkotják, a második generációt az első generáció tagjai által indítottak, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a program futása során induló részfolyamatok teljes számát (vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$, ami egyben a program teljes futási ideje is).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{2}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a program előbb-utóbb lefut (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)?

e.) Mennyi N várható értéke?

f.) Mi N generátorfüggvénye?

Megoldás: Z_k elágazó folyamat. Egylépéses utódszám-eloszlása $\begin{array}{c|c|c|c} i & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P}(X=i) & p & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-p \end{array}$.
Ennek generátor-függvénye $g(z) = pz^0 + \frac{1}{3}z^1 + (\frac{2}{3} - p)z^2 = p + \frac{1}{3}z + (\frac{2}{3} - p)z^2$, várható értéke $m = p \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + (\frac{2}{3} - p) \cdot 2 = \frac{5}{3} - 2p$.

I. $p = \frac{1}{2}$-re $g(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2$ és $m = \frac{2}{3}$.

a.) $g_2(z) = g(g(z)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{6}z^2\right)^2$

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0.017$

c.) $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = r_3$ ahol $r_0 = 0$ és $r_{k+1} = g(r_k)$. Esetünkben $r_1 = g(0) = \frac{1}{2}$, $r_2 = g(\frac{1}{2}) = \frac{17}{24}$, $r_3 = g\left(\frac{17}{24}\right) \approx 0.82$.

d.) $m < 1$, vagyis a folyamat szubkritikus, igy a kihalás (=lefutás) valószínűsége 1.

e.) $m < 1$, vagyis a folyamat szubkritikus, igy $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = 3$.

f.) N generátorfüggvénye, $g_N(z)$ a $g_N(z) = zg)g_N(z))$ egyenlet megoldása. Az átláthatóság kedvéért $g_N(z)$-t Y-nal jelölve $Y = zg(Y)$, vagyis

$$Y = z\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{6}Y^2\right),$$

ami egy másodfokú egyenlet Y-ra:

$$\frac{z}{6}Y^2 + \left(\frac{z}{3} - 1\right) Y + \frac{z}{2} = 0.$$

Ezt megoldva

$$Y = \frac{1 - \frac{z}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{3} - 1\right)^2 - 4\frac{z}{6}\frac{z}{2}}}{2\frac{z}{6}} = \frac{3 - z \pm \sqrt{9 - 6z - 2z^2}}{z}.$$

Hogy a két gyök közül a +-os vagy a −-os a jó, azt ki lehet találni pl. abból, hogy $z = 1$-ben minden generátorfüggvény 1 kell hogy legyen, vagyis $1 = \frac{3-1\pm\sqrt{9-6-2}}{1} = 2 \pm 1$, tehát a *minuszos* megoldás a helyes:

$$g_N(z) = \frac{3 - z - \sqrt{9 - 6z - 2z^2}}{z}.$$

II. $p = \frac{1}{6}$-ra $g(z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2$ és $m = \frac{4}{3}$.

a.) $g_2(z) = g(g(z)) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2\right)^2$

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = \left(\frac{4}{3}\right)^{10} \approx 17.6$

c.) $\mathbb{P}(Z_3 = 0) = r_3$ ahol $r_0 = 0$ és $r_{k+1} = g(r_k)$. Esetünkben $r_1 = g(0) = \frac{1}{6}$, $r_2 = g(\frac{1}{6}) = \frac{17}{72}$, $r_3 = g\left(\frac{17}{72}\right) \approx 0.27$.

d.) $m > 1$, vagyis a folyamat szuperkritikus, igy számolni kell: a kihalás (=lefutás) valószínűsége a $z = g(z)$ egyenlet legkisebb nemnegatív megoldása. Esetünkben

$$z = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2,$$

ami egy másodfokú egyenlet z-re, megoldásai $z = 1$ (mint mindig) és $z = \frac{1}{3}$, vagyis a kihalás (=lefutás) valószínűsége $\frac{1}{3}$.

e.) $m > 1$, vagyis a folyamat szuperkritikus, igy $\mathbb{E}N = \infty$.

f.) $m > 1$, vagyis a folyamat szuperkritikus így N pozitív valószínűséggel végtelen. Az ilyen elfajult val.változók generátorfüggvényéről nem beszéltünk, úgyhogy inkább hagyjuk.

3.5 Egy sort kiszolgáló számítógép a hozzá érkező, sorra kerülő feladatokat pontosan egységnyi idő alatt végzi el. Ezen időegység alatt azonban újabb feladat(ok) érkez(het)nek, melyek száma véletlen, és az előzményektől független. Ezek a feladatok beállnak a sorba, és ott várakoznak, amíg az előttük érkezett feladatokat a gép el nem végzi. Az egy időegység alatt érkező új feladatok számának eloszlása:

k	0	1	2	3
$P(k$ igény$)$	4/10	p	$5/10 - p$	1/10

A sor kezdetben üres, az első feladat érkezésének pillanatában kezdjük az időt mérni. Nevezzük a feladatok „nulladik generációjának” a legelőször érkezett feladatot. Nevezzük „első generációnak” azokat a feladatokat, amik az ő elvégzése alatt érkeznek. Nevezzük „második generációnak” azokat a feladatokat, amik az első generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek, stb ... Nevezzük „(n+1)-edik generációnak” azokat a feladatokat, amik az n-edik generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemszámát, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. ha $p = 4/10$,

II. ha $p = 2/10$.

a.) Mennyi Z_1 várható értéke?

b.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?

c.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

d.) Mennyi Z_{72} várható értéke?

e.) Mennyi az $r_3 := \mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

f.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sor előbb-utóbb újra üres lesz? *(Segítség: egy harmadfokú egyenletet könnyű megoldani, ha ismerjük az egyik gyökét.)*

g.) Mennyi a foglaltsági periódus hosszának várható értéke? (A foglaltsági periódus az a véletlen időszak, aminek a végén először lesz a sor újra üres.)

Megoldás: Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, amire $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás éppen a feladatban szereplő táblázatban megadott eloszlás. A kérdések megválaszolásához ennek m várható értékére és $g(z)$ generátorfüggvényére lesz szükség:

I. ha $p = 4/10$, akkor $g(z) = \frac{4}{10} \cdot z^0 + \frac{4}{10} \cdot z^1 + \frac{1}{10} \cdot z^2 + \frac{1}{10} \cdot z^3 = \frac{4+4z+z^2+z^3}{10}$, $m = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{4}{10} \cdot 1 + \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{9}{10} < 1$, a folyamat szubkritikus.

II. ha $p = 2/10$, akkor $g(z) = \frac{4}{10} \cdot z^0 + \frac{2}{10} \cdot z^1 + \frac{3}{10} \cdot z^2 + \frac{1}{10} \cdot z^3 = \frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}$, $m = \frac{4}{10} \cdot 0 + \frac{2}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 3 = \frac{11}{10} > 1$, a folyamat szuperkritikus.

Ezek alapján, a szokásos jelölésekkel

I. ha $p = 4/10$,

  a.) $\mathbb{E}Z_1 = m = \frac{9}{10}$

  b.) Z_1 generátorfüggvénye $g_1(z) = g(z) = \frac{4+4z+z^2+z^3}{10}$

  c.) Z_2 generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_2(z) &= g(g(z)) = g\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right) = \\ &= \frac{4 + 4\left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right) + \left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4+4z+z^2+z^3}{10}\right)^3}{10} \end{aligned}$$

  d.) $\mathbb{E}Z_{72} = m_{72} = m^{72} = \left(\frac{9}{10}\right)^{72} \approx 0.000507$

  e.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel

   - $r_0 = 0$
   - $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{4}{10}$
   - $r_2 = g(r_1) = g\left(\frac{4}{10}\right) = 0.5824$
   - $r_3 = g(r_2) = g(0.5824) \approx 0.68663$

  f.) $\mathbb{P}$(a sor előbb-utóbb újra üres lesz) $= \mathbb{P}$(kihalás) $= r_\infty = 1$, mert a folyamat szubkritikus.

g.) A foglaltsági periódus hossza éppen $N := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, amire $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = 10$ (mert $m < 1$).

II. ha $p = 2/10$,

a.) $\mathbb{E}Z_1 = m = \frac{11}{10}$

b.) Z_1 generátorfüggvénye $g_1(z) = g(z) = \frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}$

c.) Z_2 generátorfüggvénye

$$\begin{aligned} g_2(z) &= g(g(z)) = g\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right) = \\ &= \frac{4 + 2\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right) + 3\left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right)^2 + \left(\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10}\right)^3}{10} \end{aligned}$$

d.) $\mathbb{E}Z_{72} = m_{72} = m^{72} = \left(\frac{11}{10}\right)^{72} \approx 995.59$

e.) Az $r_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel

- $r_0 = 0$
- $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{4}{10}$
- $r_2 = g(r_1) = g\left(\frac{4}{10}\right) = 0.5344$
- $r_3 = g(r_2) = g(0.5344) \approx 0.60782$

f.) A kérdés $\mathbb{P}$(a sor előbb-utóbb újra üres lesz) $= \mathbb{P}$(kihalás) $= r_\infty$. Mivel a folyamat szuperkritikus, tudjuk, hogy $r_\infty < 1$ és számolni kell: meg kell oldani a $g(z) = z$ egyenletet. Esetünkben az egyenlet

$$\frac{4+2z+3z^2+z^3}{10} = z,$$

átszorozva és nullára redukálva

$$z^3 + 3z^2 - 8z + 4 = 0.$$

Ez egy harmadfokú egyenlet, de szerencsére tudjuk, hogy $z = 1$ mindig gyöke, vagyis a baloldali polinomból ki lehet emelni a $(z-1)$ gyöktényezőt. Valóban,

$$z^3 + 3z^2 - 8z + 4 = (z-1)(z^2 + 4z - 4),$$

amit az egyenletbe visszaírva

$$(z-1)(z^2 + 4z - 4) = 0.$$

Mivel mi NEM a $z = 1$ megoldást keressük, nyogodtan vévgig lehet osztani $(z-1)$-gyel, és marad, hogy

$$z^2 + 4z - 4 = 0,$$

ami már másodfokú. A megoldásai

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2(1 \pm \sqrt{2}),$$

vagyis a gyökök $z = -2(1 - \sqrt{2}) \approx -4.4$ és $z = -2(1 - \sqrt{2}) \approx 0.8284$. Mi az egyetlen $[0, 1)$-beli megoldást keressük, vagyis

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r_\infty = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.8284$$

g.) A foglaltsági periódus hossza éppen $N := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$, amire $\mathbb{E}N = \infty$, mert $m > 1$.

3.6 Egy vicc úgy terjed, hogy mindenki, aki meghallja, véletlen számú új embernek meséli el, éspedig 0, 1, 2 vagy 3 új embernek, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ és $p_3 = \frac{1}{2} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

A viccet Móricka találja ki, ő alkotja egyedül a nulladik generációt. Első generációnak nevezzük azokat, akinek Móricka maga meséli el a viccet, második generációnak azokat, akiknek az első generáció tagjai mesélik el, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a viccet megismerő emberek teljes számát (Mórickát is beleértve, vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{3}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{12} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vicc terjedése előbb-utóbb megáll (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)? *(Segítség: ha egy harmadfokú egyenletnek ismerjük egy gyökét, akkor a gyöktényezőt kiemelve a többi gyökre másodfokú egyenletet kapunk.)*

e.) Mennyi N várható értéke?

Megoldás: Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás a fenti $\mathbb{P}(k \text{ utód}) = p_k$ ($k = 0, 1, 2, 3$). Jelöljük ennek várható értékét m-mel, generátorfüggvényét g-vel. Legyen továbbá Z_n várható érétke m_n, generátorfüggvénye g_n, a kihalás-valószínűségek pedig $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$, $r = \mathbb{P}(\exists n : Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} r_n$.

I. $p = \frac{1}{3}$ esetén $m = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{5}{4}$, $g(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{6}z^3$.

a.) $g_2(z) = g(g(z)) = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{6}z^3)+\frac{1}{4}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{6}z^3)^2+\frac{1}{6}(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{6}z^3)^3$.

b.) $m_{12} = m^{12} = \left(\frac{5}{4}\right)^{12} \approx 14.55$.

c.) $r_0 = 0$; $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{1}{3}$; $r_2 = g(r_1) = g(1/3) \approx 0.4506$; $r_3 = g(r_2) \approx g(0.4506) \approx 0.5120$.

d.) Mivel $m > 1$, a folyamat szuperkritikus, így a kihalás valószínűsége az $r = g(r)$ egyenlet egyetlen $[0, 1)$-beli gyöke. Vagyis

$$r = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{6}r^3.$$

Ezt nullára rendezve és 12-vel végigszorozva azt kapjuk, hogy

$$0 = 2r^3 + 3r^2 - 9r + 4.$$

Mivel a $g(1) = 1$ mindig teljesül, tudjuk, hogy ennek az egyenletnek $r = 1$ biztosan gyöke. (És mivel a folyamat szuperkritikus, azt is tudjuk, hogy mi nem ezt a gyököt keressük.) Vagyis a jobboldali polinomból ki lehet emelni $(r - 1)$-et, és az jön ki, hogy

$$0 = (r - 1)(2r^2 + 5r - 4),$$

tehát az 1-től különböző gyökökre

$$0 = 2r^2 + 5r - 4,$$

amiből $r = \frac{-5\pm\sqrt{57}}{4}$. Mivel $r \in [0, 1)$,

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r = \frac{-5 + \sqrt{57}}{4} \approx 0.637.$$

e.) Mivel a folyamat szuperkritikus, $\mathbb{E}N = \infty$. (Sőt, $\mathbb{P}(N = \infty) > 0$.)

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén $m = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{7}{4}$, $g(z) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{3}z^3$.

a.) $g_2(z) = g(g(z)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{3}z^3)+\frac{1}{4}(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{3}z^3)^2+\frac{1}{3}(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}z^2+\frac{1}{3}z^3)^3$.

b.) $m_{12} = m^{12} = \left(\frac{7}{4}\right)^{12} \approx 825$.

c.) $r_0 = 0$; $r_1 = g(r_0) = g(0) = \frac{1}{6}$; $r_2 = g(r_1) = g(1/6) \approx 0.2168$; $r_3 = g(r_2) \approx g(0.2168) \approx 0.2360$.

d.) Mivel $m > 1$, a folyamat szuperkritikus, így a kihalás valószínűsége az $r = g(r)$ egyenlet egyetlen $[0, 1)$-beli gyöke. Vagyis

$$r = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}r + \frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{3}r^3.$$

Az előzőhöz hasonlóan ezt nullára rendezve és 12-vel végigszorozva azt kapjuk, hogy

$$0 = 4r^3 + 3r^2 - 9r + 2 = (r - 1)(4r^2 + 7r - 2),$$

amiből $r = 1$ vagy $r = \frac{-7\pm\sqrt{81}}{8}$, és mivel $r \in [0, 1)$,

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = r = \frac{-7 + \sqrt{81}}{8} = \frac{1}{4}.$$

e.) Mivel a folyamat szuperkritikus, $\mathbb{E}N = \infty$. (Sőt, $\mathbb{P}(N = \infty) > 0$.)

3.7 Egy boltban minden vevő kiszolgálása pontosan egy percig tart. Ez alatt véletlen számú újabb vevő érkezik, és beállnak a sorba. Az egyes vevők kiszolgálása alatt érkező új vevők száma független és azonos, $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlású.

A legelső vevő Pistike, nevezzük őt egymagát a vevők „nulladik generáció”-jának. Az ő kiszolgálása alatt érkező vevők legyenek az „első generáció”. Az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkezők alkossák a vevők „második generáció”-ját, stb. Az n-edik generációba tartozó vevők számát jelöljük Z_n-nel ($n = 0, 1, 2 \dots$).

(a) Vegyük észre, hogy Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mi az egylépéses utódszámeloszlás generátorfüggvénye és várható értéke?

(b) Mennyi Z_{10} várható értéke?

(c) Mi Z_3 generátorfüggvénye?

(d) Számoljuk ki a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$, $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ és $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűségeket.

(e) A boltos akkor tarthat pihenőt, ha egyszer csak üres lesz a sor. Vegyük észre, hogy ez pontosan akkor következik be, ha valamelyik generáció már üres – vagyis az elágazó folyamat kihal. Mi annak a valószínűsége, hogy ez előbb-utóbb bekövetkezik?

(f) Mennyi a boltos első pihenőjéig kiszolgált összes vevő számának várható értéke?

(g) **Bónusz feladat:** Mi a válasz a 7e kérdésre, ha a fenti $\lambda = \frac{3}{4}$ helyett $\lambda = 2$?

Megoldás:

a.) Valóban, minden vevő véletlen számú „utódot” hoz létre, a többitől függetlenül és velük azonos eloszlással, így az egyes generációk elemszáma Galton-Watson elágazó folyamat. Az egylépéses utódszám-eloszlás éppen a Pistike kiszolgálása alatt érkezők számának eloszlása, vagyis $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlás. Ennek generátorfüggvénye az 1.0 feladat szerint $g(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{\frac{3}{4}(z-1)}$, várható értéke pedig $m = \lambda = \frac{3}{4}$.

b.) $\mathbb{E}Z_{10} = m^{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,056$.

c.) Z_3 generátorfüggvénye

$$g_3(z) = g(g(g(z))) = exp\left(\frac{3}{4}\left(exp\left(\frac{3}{4}\left(exp\left(\frac{3}{4}(z-1)\right) - 1\right)\right) - 1\right)\right).$$

d.) A szokásos $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ jelöléssel $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$, vagyis

- $r_0 = 0$
- $r_1 = g(r_0) = g(0) = e^{\frac{3}{4}(0-1)} \approx 0,4724$
- $r_2 = g(r_1) \approx g(0,4724) = e^{\frac{3}{4}(0,4724-1)} \approx 0,6732$
- $r_3 = g(r_2) \approx g(0,6732) = e^{\frac{3}{4}(0,6732-1)} \approx 0,7826$
- $r_4 = g(r_3) \approx g(0,7826) = e^{\frac{3}{4}(0,7826-1)} \approx 0,8496.$

e.) Valóban, pontosan akkor van az első pihenőig véges sok vevő, ha a nemüres generációk száma véges. (Ugyanis az egyes generációk elemszáma külön-külön mindenképpen véges.) A kihalás valószínűsége viszont könnyű: mivel $m = \frac{3}{4} < 1$, a folyamat *szubkritikus*, így $\mathbb{P}(\text{pihenő}) = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$.

f.) Mivel $m < 1$, a folyamat össz-elemszámának várható értéke a szokásos jelöléssel $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$.

g.) **Bónusz feladat:** Ha $\lambda = 2$, akkor $m = \lambda = 2 > 1$, a folyamat *szuperkritikus*, és a kihalás valószínűsége nehezebb: a $g(z) = z$ egyetlen $[0, 1)$-beli megoldása. Vagyis meg kell oldani a $g(z) = z$ egyenletet. Esetünkben $g(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{2(z-1)}$, így a megoldandó egyenlet

$$e^{2(z-1)} = z.$$

Ezt algebrai úton megoldani nem lehet, de numerikusan elég könnyű. Mivel a g függvény fixpontját keressük, és tudjuk, hogy $r_0 = 0$-ból indítva az $r_n := g(r_{n-1})$ sorozat tart ehhez a fixponthoz, az egyik legegyszerűbb megoldás egy táblázatkezelő programmal kiszámolni az r_n sorozat első néhány (mondjuk 50) elemét: egy cellába beírjuk hogy 0, majd az alatta levő cellában kiszámoljuk a g(felette levő) értéket, és a cella tartalmát átmásoljuk az alatta levő

48 cellába. A kapott sorozat

0.00000000000000	0.13533528323661	0.17740333081914	0.19297524966823
0.19907980576336	0.20152529167524	0.20251336053740	0.20291395050895
0.20307658623782	0.20314265199913	0.20316949532043	0.20318040310131
0.20318483564429	0.20318663690331	0.20318736888815	0.20318766634852
0.20318778722911	0.20318783635204	0.20318785631440	0.20318786442662
0.20318786772323	0.20318786906289	0.20318786960730	0.20318786982853
0.20318786991843	0.20318786995497	0.20318786996982	0.20318786997585
0.20318786997830	0.20318786997930	0.20318786997970	0.20318786997987
0.20318786997993	0.20318786997996	0.20318786997997	0.20318786997998
0.20318786997998	0.20318786997998	0.20318786997998	0.20318786997998
0.20318786997998	0.20318786997998	0.20318786997998	0.20318786997998
0.20318786997998	0.20318786997998	0.20318786997998	

A kihalás valószínűsége jól látszik: $r_\infty \approx 0.20318786997998$.

3.8 Egy hálózati kiszolgáló minden beérkező igényt pontosan 1 időegység alatt szolgál ki. Az igények pedig $\frac{2}{3}$ rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek és állnak be a kiszolgálási sorba, vagyis az egy igény kiszolgálásával töltött 1 időegység alatt érkező újabb igények száma $\frac{2}{3}$ paraméterű Poisson eloszlású, és független az előzményektől. A $t = 0$ pillanatban az addig üres sorba megérkezik az első igény, és ezzel kezdetét veszi egy „foglaltsági periódus", ami addig tart, amíg egy igény kiszolgálása után újra üres nem lesz a sor. Számoljuk ki a foglaltsági periódus hosszának várható értékét!

Megoldás: Definiáljuk az igények családfáját a következőképpen: egy igény *gyerekeinek* tekintjük azokat az igényeket, amik az ő kiszolgálása alatt érkeznek. Mivel minden igény kiszolgálása pontosan 1 időegységig tart, a gyerekek száma a bejövő Poisson folyamat beütésszáma ezen 1 időegység alatt, vagyis az előzményektől független, $\lambda = \frac{2}{3}$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.

Tekintsük az igények 0. generációjának a $t = 0$-kor érkező legelső igényt egymagát. Tekintsük 1. generációnak az ő gyerekeit, illetve általában $(n + 1)$-edik generációnak az n-edik generáció tagjainak gyerekeit.

Jelöljük Z_n-nel az n-edik generáció elemszámát. Így Z_n Galton-Watson elágazó folyamat $X \sim Poi\left(\frac{2}{3}\right)$ egylépéses utódszámeloszlással. A foglaltsági periódus hossza nem egyéb, mint a folyamat kihalásáig az összes generáció össz-létszáma, vagyis $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$. A kérdés pedig $\mathbb{E}N$.

Az egylépéses utódszám várható értéke $m = \mathbb{E}X = \lambda = \frac{2}{3}$. Mivel $m < 1$, a folyamat szubkritikus, és ilyenkor tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

3.9 Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

Megoldás: Az egylépéses utódszámeloszlás várható értéke $m = g'(1) = 1$, vagyis a folyamat kritikus. Ezért a kihalás valószínűsége 1.

3.10 Legyen Z_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ Galton-Watson elágazó folyamat, ahol $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

Megoldás: Mivel mindenkinek legalább egy utóda születik, a kihalás valószínűsége nulla.

3.11 Egy Galton-Watson elágazó folyamatban az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{\frac{z-1}{2}}$. Mennyi a kihalás valószínűsége?

Megoldás: $g'(z) = e^{\frac{z-1}{2}}\frac{1}{2}$, így az egylépéses utódszám-eloszlás várható értéke $m = g'(1) = \frac{1}{2}$. Vagyis $m < 1$, a folyamat szubkritikus, ezért a kihalás valószínűsége 1.

4. Poisson folyamat

4.1 Egy várban lévő száraz kút mellett rengeteg túrista megy el. Ezek mindegyike egymástól függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel egy pénzérmét dob a kútba, amibe így egy nap alatt átlagosan 50 érme hull. Ezek mindegyike 50% valószínűséggel esik a „FEJ" oldalával felfelé, a többitől függetlenül.

a.) Legyen X az egy nap alatt (mondjuk június 1-én) a kútba dobott érmék száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség?

b.) Legyen Y az egy nap alatt „FEJ" oldalával felfelé a kútba eső érmék száma. A teljes várható érték tétel segítségével számoljuk ki Y várható értékét. *(Segítség: Mi is lesz Y feltételes eloszlása (ill. feltételes várható értéke) az $\{X = n\}$ feltétel mellett?)*

c.) Számoljuk ki Y eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűségeket a teljes valószínűség tétel segítségével! *(Segítség: $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x$.)*

Megoldás:

a.) Mivel sok kísérlet egymástól függetlenül kis valószínűséggel sikeres és X a sikeres kísérletek száma, Poisson eloszlással modellezzük: $X \sim Poi(\lambda)$, ahol a paraméter $\lambda = \mathbb{E}X = 50$ a szöveg szerint. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-50}\frac{50^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

b.) Azon feltétel mellett, hogy $X = k$, vagyis k érme esik a kútba, Y várható értéke $\frac{1}{2}k$, hiszen az érmék átlagosan fele esik fejjel felfelé. Vagyis $\mathbb{E}(Y \,|\, X = k) = \frac{k}{2}$. Az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes várható érték tétel miatt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{E}(Y \,|\, X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)\frac{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2}\mathbb{E}X = 25.\end{aligned}$$

c.) Ha tudjuk, hogy n érme esik a kútba, és ezek mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz fej, akkor a fejek száma *ezen* $\{X = n\}$ *feltétel mellett* binomiális eloszlású n és $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Matematikai jelöléssel:

$$\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

ha $0 \leq k \leq n$, vagyis ha $n \geq k$. Ezzel szemben $n < k$-ra persze $\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = 0$. Mivel az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, a teljes valószínűség tétel miatt minden $k \in \{0, 1, 2 \dots\}$-re

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!} = \\
&= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{l=0^\infty} \frac{(q\lambda)^l}{l!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{q\lambda} = e^{-(1-q)\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} = \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!},
\end{aligned}$$

ahol $\mu = p\lambda = 25$, vagyis $Y \sim Poi(\mu)$: a „FEJ" oldallal felfelé érkező érmék száma Poisson eloszlású $\mu = 25$ paraméterrel.

4.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

Megoldás:

a.) Legyen X a Móricka szeletébe kerülő mazsolák száma. X jó közelítéssel Poisson eloszlású, mert sok mazsola próbálkozik, hogy bekerüljön, mindegyik a többitől függetlenül kis valószínűséggel jár sikerrel, X pedig a sikeres próbálkozók száma. A λ paraméter pedig a várható érték: $\lambda = 6$. Így

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}(1 + \lambda) = \\
&= 7e^{-6} \approx 0.017 = 1.7\%.
\end{aligned}$$

b.) Legyen Y a mazsolák száma Pistike szeletében. Mivel a kondér nagy és a mazsola sok, X és Y jó közelítéssel független, így

$$\mathbb{P}(X < 2 \,|\, Y = 12) = \mathbb{P}(X < 2) \approx 1.7\%$$

továbbra is.

4.3 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

a.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

b.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

c.) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

Megoldás: Az egyes oldalakra eső sajtóhubák száma Poisson eloszlással közelíthető, mivel sok sajtóhuba próbálkozik egymástól lényegében függetlenül, hogy pont oda essen, és ez mindegyiknek kicsi valószínűséggel sikerül. Sőt, az egyes oldalakon lévő sajtóhubák száma jó közelítéssel független, ugyanilyen megfontolásból. Ezek után csak a várható értékükre van szükség, ami persze az adott oldalszámra eső hubák átlagos száma.

a.) Jelölje X_{13} a 13-adik oldalra eső sajtóhubák számát. A fentiek alapján ez jó közelítéssel Poisson eloszlású $\lambda = \frac{1500}{1000} = 1.5$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.5}\frac{(1.5)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Emiatt

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 1 - e^{-1.5} - e^{-1.5} \cdot 1.5 \approx 0.44.$$

b.) Legyen X_{42} a 42-edik oldalra eső sajtóhubák száma. A fentiek miatt X_{42} is $Poi(1.5)$ eloszlással közelíthető és X_{13}-tól jó közelítéssel független, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{42} = 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2)\mathbb{P}(X_{42} = 2) \approx 0.44 \cdot e^{-1.5}\frac{(1.5)^2}{2!} \approx 0.11.$$

c.) Sőtsőt, a vesszőhibák és az egyéb sajtóhubák száma jó közelítéssel külön-külön is Poisson eloszlású és egymástól független, ugyanilyen megfontolásból. Ezért ha Y_{13} a 13-adik oldalon lévő vesszőhibák száma, Z_{13} pedig a 13-adik oldalon lévő egyéb sajtóhubák száma, akkor jó közelítéssel $Y_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{1}{3}}{1000})$, $Z_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{2}{3}}{1000})$ és ezek függetlenek. Így

$$\mathbb{P}(Y_{13} \geq 2 \text{ és } Z_{13} = 1) \approx \left(1 - e^{-0.5}(1 + 0.5)\right)\left(e^{-1} \cdot 1\right) \approx 0.033.$$

4.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

Megoldás:

a.) X a sikeres próbálkozók száma nagyon sok független próbálkozásból, nagyon kis sikerval.ség mellett, így $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = \mathbb{E}X$. Esetünkben $\lambda = \mathbb{E}X = 60s \cdot 0.1Bq = 6$, vagyis $X \sim Poi(6)$, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-6}\frac{6^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

b.) Legyen $X_{[0,1]}$ a 08:00 és 08:01 közötti bomlások száma, $X_{[1,3]}$ a 08:01 és 08:03 közötti bomlások száma. Ezek diszjunkt intervallumok, ezért $X_{[0,1]}$ és $X_{[1,3]}$ függetlenek. Továbbá $X_{[0,1]} \sim Poi(6)$ az előző részből, és hasonlóan $X_{[1,3]} \sim Poi(12)$. Ezért

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4 \text{ és } X_{[1,3]} = 10) &= \mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4)\mathbb{P}(X_{[1,3]} = 10) = \\ &= e^{-6}\frac{6^4}{4!} \cdot e^{-12}\frac{12^{10}}{10!} \approx 0.134 \cdot 0.105 \approx 0.01403\end{aligned}$$

c.) Legyen Y a 09:00:00 és 09:00:10 közötti bomlások száma. Az előzőekhez hasonlóan $Y \sim Poi(1)$. Vegyük észre, hogy pontosan akkor kell legalább 10 másodpercet várni, ha 10 másodperc alatt nem történik bomlás, vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1} \approx 0.368.$$

Alternatív megoldás: Legyen τ a 09:00 után történő első bomlásig a várakozási idő másodpercben. A Poisson-folyamat tulajdonságai miatt $\tau \sim Exp(\lambda)$ ahol $\lambda = \frac{1}{10}$ a folyamat intenzitása. Így

$$\mathbb{P}(\tau \geq 10) = 1 - F_{Exp(\frac{1}{10})}(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10}\cdot 10}\right) = e^{-1} \approx 0.368$$

4.5 Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfa-részecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

Megoldás: A nagy energiájú alfa-részecskék Poisson-folyamat szerint keletkeznek, 1 rátával. (Az időt mérjük másodpercben.) Az *észlelt* nagy energiájú részecskék folyamata ennek egy ritkítása, ezért szintén Poisson-folyamat, $1 \cdot 0.9 = 0.9$ rátával. Ugyanígy, a kis energiájú alfa-részecskék is Poisson-folyamat szerint keletkeznek 3 rátával, tehát az *észlelt* kis energiájú részecskék folyamata is Poisson-folyamat, $3 \cdot 0.2 = 0.6$ rátával. A kétféle észlelt részecske folyamata független, ezért az uniójuk is Poisson-folyamat – és a ráták összeadódnak.

Összefoglalva a lényeg: az *összes észlelt* részecske folyamata Poisson-folyamat, $0.9 + 0.6 = 1.5$ rátával.

Legyen X a két másodperc alatt észlelt részecskék száma. Így $X \sim Poi(\lambda)$, ahol $\lambda = \mathbb{E}X = 2 \cdot 1.5 = 3$. Vagyis $k = 0, 1, 2, \ldots$-re $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$. A kérdésre a válasz:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^{3}\mathbb{P}(X = k) = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right) = 1 - 13e^{-3} \approx 0.3528 \approx 35\%.$$

4.6 A radioaktív ${}^{14}C$ atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ${}^{14}C$ magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

Megoldás:

a.) Jelöljük ξ-vel az (egyetlen) atommag élettartamát, F-fel ennek eloszlásfüggvényét, $T_{1/2}$-vel a felezési időt, vagyis $T_{1/2} = 5730\text{év} \approx 1.8 \cdot 10^{11}s$. Az exponenciális eloszlás definíciója szerint $x \geq 0$-ra

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

a felezési idő definíciója szerint pedig

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi < T_{1/2}) = F(T_{1/2}) = 1 - e^{-\lambda T_{1/2}},$$

amiből

$$\lambda = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \approx \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11}s}$$

i.) $\lambda = \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx 1.21 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{év}}$, vagyis ha az időt években mérjük, akkor $\lambda \approx 1.21 \cdot 10^{-4}$.

ii.) $\lambda \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11}s} \approx 3.83 \cdot 10^{-12} \frac{1}{s}$, vagyis ha az időt másodpercben mérjük, akkor $\lambda \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$.

b.) Mérjük az időt másodpercben!

i.) 1 másodpercen belül: Az eltelt idő $t = 1$.

$$\mathbb{P}(\xi < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$$

Hát persze: Mivel λt nagyon kicsi, $e^{-\lambda t}$-t nagyon jól közelíti az elsőfokú Taylor polinomja: $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, vagyis $F(t) \approx \lambda t$. Éppen ezért hívják λ-t az exponenciális eloszlás *rátájának*.

(Alternatív érvelés: mivel λt kicsi, a ξ élettartam $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (ha $x > 0$) sűrűségfüggvénye jó közelítéssel konstans a $[0, t]$ intervallumon, így $\mathbb{P}(\xi < t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(0)(t - 0) = \lambda t$.)

ii.) Hasonlóan 2 és 3 másodpercre:

$$\mathbb{P}(\xi < 2) \approx 2\lambda \approx 7.66 \cdot 10^{-12}$$
$$\mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$$

c.) Szigorúan véve X binomiális eloszlású $n = 10^{12}$ és $p = \mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$ paraméterekkel, így

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 12) &= \binom{n}{12} p^{12}(1-p)^{n-12} \\ &\approx \binom{1000000000000}{12} \left(1.15 \cdot 10^{-11}\right)^{12} \left(1 - 1.15 \cdot 10^{-11}\right)^{999999999988}.\end{aligned}$$

Ezt az én számológépem nem is bírja kiszámolni, ezért Poisson eloszlással közelítünk: mivel n nagy és p kicsi, jó közelítéssel X Poisson eloszlású $np \approx 11.5$ paraméterrel. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = 12) \approx e^{-11.5} \frac{11.5^{12}}{12!} \approx 0.113 = 11.3\%$$

d.) Y a fenti, Poisson eloszlással modellezhető X ritkítása, így maga is (jó közelítéssel) Poisson eloszlású $\frac{np}{4} \approx 2.875$ paraméterrel. Így

$$\mathbb{P}(Y = 3) \approx e^{-2.875} \frac{2.875^{3}}{3!} \approx 0.223 = 22.3\%$$

e.) Mivel az anyag másodperces időskálán nézve nagyon lassan fogy el, rövid ideig nyugodtan úgy tekinthetjük, hogy az észlelések Poisson folyamat szerint történnek. (Hosszú időre ez persze nem igaz, 5730 év alatt például a felére csökken az aktivitás (vagyis a ráta).) Mivel a bomlások rátája $n\lambda$, az észlelések rátája $\frac{n\lambda}{4} \approx 0.96$. Így az első észlelésig eltelt T idő (nagyon jó közelítéssel) exponenciális eloszlású 0.96 paraméterrel.

4.7 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

Megoldás: Az időt mérjük órában. Így a csörgések Poisson folyamatának rátája $\frac{1}{2}$. Legyen X_t a film kezdetétől számítva t idő alatt a csörgések száma, T pedig az első csörgésig eltelt idő. Tudjuk, hogy $X_t \sim Poi(t \cdot \lambda)$, de azt is, hogy $T \sim Exp(\lambda)$.

a.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{2.5} = 0) = \mathbb{P}(Poi(2.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = e^{-1.25}\frac{1.25^0}{0!} = e^{-1.25} \approx 0.287$. **2. megoldás:** $\mathbb{P}(T > 2.5) = 1 - \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 2.5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2.5}) = e^{-1.25} \approx 0.287$.

b.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{0.5} > 0) = 1 - \mathbb{P}(Poi(0.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = 1 - e^{-0.25}\frac{0.25^0}{0!} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$.
2. megoldás: $\mathbb{P}(T < 0.5) = \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 0.5) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\cdot 0.5} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$.

c.) **1. megoldás:** Poisson folyamat ritkítása is Poisson folyamat: ha csak a Jancsi által felvett hívásokat nézzük, azok is Poisson folyamatot alkotnak, csak a ráta ezúttal $\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, mivel óránként átlag $\frac{1}{4}$ hívást vesz fel. Így, ha $Y_{2.5}$ a Jancsi által 2.5 óra alatt felvett hívások száma, akkor $Y_{2.5} \sim Poi(2.5 \cdot \mu) = Poi(0.625)$. Így

$$\mathbb{P}(Y_{2.5} > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 0) - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

2. megoldás: Legyen $X = X_{2.5}$ a telefoncsörgések teljes száma, $X \sim Poi(\rho)$ ahol $\rho = 1.25$, és legyen Y a Jancsi által felvett telefonok száma. Az $X = n$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása binomiális, éspedig $(n, p = \frac{1}{2})$ paraméterekkel. Vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel $n = 0, 1, 2, \ldots$-re

$$\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{ha } k = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{ha } k > n, \text{ persze} \end{cases}.$$

Ebből a teljes valószínűség tétele szerint minden $k = 0, 1, 2 \ldots$-re

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = k \,|\, X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\rho}\frac{\rho^n}{n!}\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ez az összeg szerencsére kiszámolható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$-t kiírva $n!$ kiesik, utána pedig kézenfekvő az $l := n - k$ jelölés, ha már n úgy is csak k-tól fut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\rho}\rho^{l+k}\frac{1}{k!l!}p^k q^l = e^{-\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(q\rho)^l}{l!}.$$

Az utolsó szumma kedves ismerősünk, mivel $e^x = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!}$. Így

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}e^{q\rho} = e^{-p\rho}\frac{(p\rho)^k}{k!}.$$

Vagyis sikerült kézzel bebizonyítanunk, hogy Poisson eloszlás ritkítása is Poisson eloszlás, éspedig $Y \sim Poi(p\rho)$.
Innen pedig, mivel $p\rho = \frac{1}{2} \cdot 1.25 = 0.625$,

$$\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

4.8 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*

Megoldás:

a.) Legyen $X_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező igények száma, és mérjük az időt 08:00-tól kezdve percben. Mivel percenként átlagosan tíz igény érkezik, a Poisson folyamat rátája $\lambda_X = 10$, így $a = 0$, $b = 1$ választással $X_{[0;1]} \sim Poi((b-a)\lambda_X) = Poi(10)$. (Persze: az egy perc alatt érkező igények száma Poisson eloszlású, várható értéke pedig 10.) Így annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt 5-nél kevesebb igény érkezik,

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} < 5) = \sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(X_{[0;1]} = k) = \sum_{k=0}^{4} e^{-10}\frac{10^k}{k!} =$$
$$= e^{-10}\left(1 + 10 + \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{6} + \frac{10^4}{24}\right) \approx 0.02925$$

b.) Legyen $Y_{[a;b]}$ az a és b időpont között történő hibák száma. Mivel az egyes igények az előzményektől függetlenül azonos valószínűséggel okoznak hibát, a hibák is Poisson folyamatot alkotnak (ami az igények Poisson folyamatának ritkítása), ennek rátája $\lambda_Y = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$. (Persze: percenként átlag 1 hiba történik.) Így $Y_{[0;60]} \sim Poi((60-0)\lambda_Y) = Poi(60)$, amiből

$$\mathbb{P}(Y_{[0;60]} = 2) = e^{-60}\frac{60^2}{2!} \approx 1.576 \cdot 10^{-23}$$

c.) Legyen $Z_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező, *hibát nem okozó* igények száma. Így az Y és a Z Poisson folyamatok egyaránt az X ritkításai, amik ráadásul diszjunktak: ha egy igény az egyik folyamatban szerepel, akkor a másikban nem. Az ilyenekről tudjuk előadásról, hogy *egymástól* függetlenek (de persze az X folyamattól nem). Így

$$Y_{[0;1]} \sim Poi((1-0)\frac{1}{10} \cdot 10) = Poi(1) \quad , \quad Z_{[0;1]} \sim Poi((1-0)\frac{9}{10} \cdot 10) = Poi(9)$$

a kérdés pedig $\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5 \text{ és } Y_{[0;1]} = 0)$. Ennek a számolásakor az Y és Z függetlenségét úgy tudjuk kihasználni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) \cdot \mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0).$$

Az első tényező

$$\mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-9}\frac{9^k}{k!} = 1 - e^{-9}\left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24}\right),$$

a második pedig

$$\mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0) = e^{-1}\frac{1^0}{0!} = e^{-1}.$$

Ezt összerakva

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \left[1 - e^{-9}\left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24}\right)\right] e^{-1} \approx 0.3477$$

4.9 A postafiókomba az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek (éjjel-nappal egyenletesen), naponta átlagosan 24. Minden email a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel spam; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem spam, de nincs is vele teendő; a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel viszont azt eredményezi, hogy valamit csinálni kell.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggel 8-tól 10 óráig 4-nél több emailt kapok?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 3 olyan email érkezik, amivel teendő lesz?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 5 email érkezik, de spam egy se? (*Vigyázat: Az emailek száma és a spamek száma nem független! Tipp: a spamek száma viszont független a többi email számától. Miért is?*)

Megoldás:

a.) Legyen $X_{[8,10]}$ a reggel 8 és 10 között érkező emailek száma. Mivel az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek, $X_{[8,10]}$ Poisson eloszlású. Várható értéke 2, mivel óránként átlag 1 email érkezik. Vagyis $X_{[8,10]} \sim Poi(2)$, vagyis $\mathbb{P}(X_{[8,10]} = k) = e^{-2}\frac{2^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$-re. Ebből

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{[8,10]} > 4) &= 1 - [\mathbb{P}(X_{[8,10]} = 0) + \mathbb{P}(X_{[8,10]} = 1) + \cdots + \mathbb{P}(X_{[8,10]} = 4)] = \\ &= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right) = \\ &= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24}\right) = 1 - 7e^{-2} \approx 0.053 = 5.3\%.\end{aligned}$$

b.) Legyen $Y_{[8,10]}$ a reggel 8 és 10 között érkező olyan emailek száma, amivel teendő lesz. Az ilyen emailek folyamata az összes email Poisson-folyamatának ritkítása $p = \frac{1}{4}$-szeresére, így maga is Poisson-folyamat, negyedakkora rátával. Ezért $Y_{[8,10]} \sim Poi\left(\frac{1}{2}\right)$, vagyis $\mathbb{P}(Y_{[8,10]} = k) = e^{-\frac{1}{2}}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$-re. Ebből

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{[8,10]} \geq 3) &= 1 - [\mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 0) + \mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 1) + \mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 2)] = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!}\right) = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2}\right) = 1 - \frac{13}{8}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.014 = 1.4\%.\end{aligned}$$

c.) Tekintsük külön a spamek folyamatát és a *nem spam* emailek folyamatát. Mindkettő az összes email Poisson-folyamatának ritkítása, *sőt*: az egyik egy ritkítás során megmaradó eseményekből áll, a másik pedig az ugyanezen ritkítás során kidobott eseményekből. Előadásról tudjuk, hogy ezek nem csak külön-külön Poisson folyamatok, hanem *függetlenek is*.

Hogy kicsit kevesebb legyen a jelölés, mint az előző két pontban, nem írok több indexet... Legyen Z a reggel 8 és 10 között érkező *nem spam* emailek száma, V pedig a reggel 8 és 10 között érkező spamek száma. A fentiek szerint $Z \sim Poi\left(\frac{3}{2}\right)$, $V \sim Poi\left(\frac{1}{2}\right)$ és függetlenek, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \geq 5, V = 0) &= \mathbb{P}(Z \geq 5)\mathbb{P}(V = 0) = \\ &= \left[1 - e^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)\right]e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.011 = 1.1\%.\end{aligned}$$

4.10 Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

Megoldás:

a.) Legyen X a 10:00 és 10:02 között érkező hibás kérések száma. A hibás kérések folyamata az összes kérés Poisson-folyamatának ritkítása, így maga is Poisson folyamat. Mivel két perc alatt átlag két hibás kérés érkezik, $\mathbb{E}X = 2$, vagyis $X \sim Poi(2)$. Így $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0.135$

b.) Mivel a 20 kérés mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás,

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem hibás}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20} \approx 0.122$$

(Alternatív megoldás: azon feltétel mellett, hogy összesen 20 *kérés érkezett, a hibás kérések száma binomiális eloszlású* $n = 20$, $p = \frac{1}{10}$ *paraméterekkel, és*

$$\mathbb{P}\left(Bin\left(20; \frac{1}{10}\right) = 0\right) = \binom{20}{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0\left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

)

c.) A hibás és a hibátlan kérések száma egymástól független, ezért a feltételes valószínűség megegyezik a feltétel nélküli valószínűséggel, amit az a.) pontban kiszámoltunk: $e^{-2} \approx 0.135$

5. Berry-Esseen tétel

5.1 Egy bolha a számegyenesen ugrál. A nullából indul, és minden egész másodpercben ugrik. Az egyes ugrások függetlenek, és egyenletes eloszlásúak $[-1; 1]$-en. Vagyis a bolha helye n másodperc elteltével $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-1; 1]$ intervallumon.

a.) Legyen $n = 1000000$ (vagyis a bolha kb. 11 órája és 34 perce ugrál). Ha ekkor a $\mathbb{P}(S_n > 100)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)

b.) Azt szeretnénk, hogy a $\mathbb{P}(S_n > 100)$ közelítésének hibája legfeljebb 10^{-5} legyen. Legalább mennyinek kell lenni n-nek? (Kb. hány évig kell ehhez a bolhát ugráltatni?)

Megoldás:
A Berry-Esseen tétel szerint

$$hiba \leq \frac{C\delta}{\sigma^3\sqrt{n}}.$$

Ebből a szórás

$$\sigma = \sqrt{D^2X_1} = \sqrt{\mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}X_i)^2}.$$

Ebből a várható érték szimmetria-okból nulla. A négyzet várható értéke

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ahol $f(x)$ az X_i sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ ha } -1 < x < 1, \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}.$$

Vagyis

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3},$$

így

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

amit persze a képletgyűjteményből is ki lehetett olvasni.

Kell még a δ, ami a *centrált harmadik abszolút momentum*, vagyis

$$\delta = \mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^3).$$

Szerencsére $\mathbb{E}X = 0$, így

$$\delta = \mathbb{E}(|X|^3) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} |x|^3 \,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x.$$

Itt az abszolút érték nagyon fontos, anélkül nulla lenne az integrál, ami nonszensz.

Az abszolút értékkel legkönnyebben úgy bánhatunk el, ha kihasználjuk, hogy az integrálandó függvény páros, ezért elég pozitív x-ekre integrálni és az eredményt kétszer számolni:

$$\delta = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

Végül $C = 0.4748$ a feladat szövege szerint, vagyis

$$hiba \le \frac{C\delta}{\sigma^3\sqrt{n}} \approx \frac{0.6168}{\sqrt{n}}.$$

a.) Ha $n = 1000000$, akkor $hiba \le \frac{0.6168}{\sqrt{1000000}} \approx 6.2 \cdot 10^{-4}$.

b.) Ha $\frac{0.6168}{\sqrt{n}} \le 10^{-5}$ a cél, akkor $n \ge \left(\frac{0.6168}{10^{-5}}\right)^2 \approx 3804216300 \approx 3.80 \cdot 10^9$ kell legyen. Ennyi másodperc kb. 120 és fél év.

5.2 Egy béka a számegyenesen ugrál. A nullából indul, majd minden másodpercben ugrik egyet: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egy egységnyit jobbra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig egy egységnyit balra – az előzményektől függetlenül. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 150 ugrás után legalább 10 egységnyivel jutott jobbra. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstanst vehetjük* 0.4748*-nak.)*

Megoldás: Legyen X_i a béka i-edik ugrása. A szöveg szerint az X_i-k függetlenek és egyenletesek a $\{-1, 0-1\}$ halmazon. Legyen $n = 150$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a béka helye 150 ugrás után. Móricka a $\mathbb{P}(S_n \geq 10)$ valószínűséget akarja CHT-vel becsülni. A Berry-Esseen tétel szerint a becslés hibájára

$$\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3},$$

ahol $C = 0.4748$, σ az X_i-k (közös) szórása és $\delta = \mathbb{E}(|X_i - m|^3)$, ahol $m = \mathbb{E}X_i$. Esetünkben

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1+0+1}{3} = 0 \\ \sigma^2 &= \mathbb{E}X_i^2 - m^2 = \mathbb{E}X_i^2 = \frac{(-1)^2+0^2+1^2}{3} = \frac{2}{3} \\ \delta &= \mathbb{E}(|X_i - m|^3) = \mathbb{E}(|X_i|^3) = \frac{|-1|^3+|0|^3+|1|^3}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ezeket visszhelyettesítve

$$\text{hiba} \leq \frac{0.4748 \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{150}\sqrt{\frac{2}{3}}^3} = \frac{0.4748}{\sqrt{100}} = 0.04748 \approx 4.7\%.$$

5.3 Pistike iskola után nem megy csak úgy haza: az iskolakapun való kilépést követően minden másodpercben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel egyet lép előre (hazafelé), $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont kettőt hátra (vagyis az ellenkező irányba), az előzményektől függetlenül. Az apukája a centrális határeloszlás tétel segítségével megbecsüli annak valószínűségét, hogy egy óra elteltével Pistike legalább 200 lépésnyit közeledett otthonához. Legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$-nek.) (*Bónusz kérdés*: hogyan viszonyul ez a hiba az apuka becslésének eredményéhez? Miben lehet biztos az apuka?)

Megoldás:
Pistike elmozdulása hazafelé irányba (lépésben mérve) $n = 3600$ másodperc elteltével $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ahol $\{X_1, X_2, \dots\}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, $\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(X_i = -2) = \frac{1}{3}$. A Berry-Esseen tétel szerint ha a $\mathbb{P}(S_n \geq 200)$ valószínűséget a CHT-vel közelítjük, akkor

$$hiba \leq \frac{C\delta}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

ahol σ az X_i-k szórása, δ pedig a centrált harmadik abszolút momentuma ($\delta = \mathbb{E}(|X_i - \mathbb{E}X_i|^3)$). Esetünkben $\mathbb{E}X_i = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = 0$, így

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(X_i^2) = \frac{2}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^2 = 2, \text{ vagyis } \sigma = \sqrt{2},$$

továbbá

$$\delta = \mathbb{E}(|X_i|^3) = \frac{2}{3} \cdot |1|^3 + \frac{1}{3} \cdot |-2|^3 = \frac{10}{3}.$$

Összerakva:

$$hiba \leq \frac{C\delta}{\sigma^3\sqrt{n}} = \frac{0.4784 \cdot \frac{10}{3}}{\sqrt{2}^3\sqrt{3600}} \approx 0.0094 = 0.94\%.$$

Válasz a bónusz kérdésre: az apuka becslése a CHT alapján

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq 200) &= 1 - \mathbb{P}(S_n < 200) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - n\mathbb{E}X_i}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{200}{\sqrt{2}\sqrt{3600}}\right) \approx 1 - \Phi(2.36) \\
&\approx 1 - 0.9909 = 0.0091 = 0.91\%,
\end{aligned}$$

ami kisebb a hibánál. Apuka csak abban lehet biztos, hogy a tényleges valószínűség legfeljebb 1.85%.

5.4 Móricka 10000-szer dob egy szabályos dobókockával.

a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak valószínűségét, hogy a dobott számok átlaga legalább 3.7.

b.) A Berry-Esseen tétel szerint legfeljebb mennyi lehet a CHT közelítés hibája?

Megoldás: Legyen $n = 10000$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re X_i az i-edik dobás eredménye. Legyen $S_n = X_i + \cdots + X_n$ a dobott számok összege. Feladat a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq 3.7\right) = \mathbb{P}(S_n \geq 37000)$ valószínűség közelítése. Az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak.

a.) $m := \mathbb{E}X_i = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$, $\mathbb{E}X_i^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$, vagyis $\sigma^2 := Var(X_i) = \mathbb{E}X_i^2 - m^2 = \frac{35}{12}$. Így S_n várató értéke $\mathbb{E}S_n = nm = 35000$, szórása pedig $\mathbf{D}S_n = \sqrt{n}\sigma \approx 170.8$. Vagyis ha a várható értéket 2000-rel túl akarjuk lépni, az a szórás körülbelül 11.7-szeresét jelenti. A CHT szerint

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq 37000) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \geq \frac{37000 - 35000}{100\sqrt{\frac{35}{12}}}\right) \approx \\
&\approx \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \geq 11.0\right) \approx 1 - \Phi(11.7) = \Phi(-11.7),
\end{aligned}$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. Ezt kevés táblázatból lehet 11.7-ben kiolvasni, de az mindegyikből látszik, hogy $\Phi(11.7) > 0.9999$, vagyis $1 - \Phi(11.7) < 10^{-4}$. A táblázatkezelőm szerint viszont $\Phi(-11.7) \approx 6.4 \cdot 10^{-32}$.

b.) Ehhez kell még az X_i-k eloszlásának $\delta := \mathbb{E}(|X_i - m|^3)$ jellemzője. Esetünkben

$$\delta = \frac{|1-3.5|^3 + |2-3.5|^3 + |3-3.5|^3 + |4-3.5|^3 + |5-3.5|^3 + |6-3.5|^3}{6} = \frac{51}{8}.$$

Vagyis a Berry-Esseen tétel szerint a CHT közelítés hibájára $C = 0.4748$-cal

$$\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3} = \frac{0.4748 \cdot \frac{51}{8}}{100\sqrt{\frac{35}{12}}^3} \approx 0.006.$$

Vagyis a becslés hibája sok nagyságrenddel nagyobb (lehet), mint a becslés maga.

6. Nagy eltérések

6.1 Bergengócia elektromos hálózatára tízezer fogyasztó kapcsolódik. Közülük 9000-nek 32 amperes biztosítéka van, vagyis az általa felvett teljesítmény legfeljebb $32A \times 230V = 7360W$ lehet. A maradék 1000 fogyasztónak 100 amperes biztosítéka van, így legfeljebb $100A \times 230V = 23000W$ teljesítményt vehet fel. Bergengóciában a „csúcsidő" délután 2-kor van, ekkor mérik a legnagyobb fogyasztást. A bergengóc elektromos műveknek az egyes fogyasztók csúcsidőbeli fogyasztásának eloszlásáról (a fenti korlátokon túl) fogalma sincs, de azt tudják, hogy az egyes fogyasztók fogyasztásai függetlenek, és hogy az *átlagos össz-fogyasztás* csúcsidőben $3.2 \cdot 10^7 W$. Mekkora kell legyen az elektromos hálózat K össz-teljesítménye (Watt-ban), ha azt akarják, hogy a csúcsidőbeli össz-fogyasztás $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel K alatt maradjon?

Megoldás:
Legyen $n = 10000$ és a csúcsidőbeli össz-fogyasztás $S_n = X_1 + \cdots + X_{10000}$, ahol $X_1, \ldots, X_{10000}$ az egyes fogyasztók fogyasztásai Watt-ban. A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint minden pozitív t-re

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right),$$

ahol $\mathbb{E}S_n = 3.2 \cdot 10^7$ a szöveg szerint, a_i és b_i pedig az i-edik fogyasztás alsó illetve felső korlátja: a konkrét esetben mindegyik $a_i = 0$, a b_i pedig a 9000 kisfogyasztóra 7360, az 1000 nagyfogyasztóra pedig 23000. Így a nevezőbeli szumma

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 9000 \cdot (7360 - 0)^2 + 1000 \cdot (23000 - 0)^2 = 1.0165264 \cdot 10^{12}.$$

A 10^{-8}-os biztonsághoz legyen tehát $K = \mathbb{E}S_n + t$, ahol

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = 10^{-8} \quad \text{(és nem pedig } 1 - 10^{-8}\text{)}.$$

Ez utóbbit t-re megoldva

$$t = \sqrt{-\frac{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}{2} \ln(10^{-8})} = \sqrt{4 \cdot 1.0165264 \cdot 10^{12} \cdot \ln 10} \approx 3.06 \cdot 10^6,$$

vagyis $K = 3.2 \cdot 10^6 + 3.06 \cdot 10^6 = 3.506 \cdot 10^7$ jó lesz.

6.2 Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?

Megoldás:
Legyen $n = 500$, és számoljunk minden pénzösszeget „ezerFt"-ban, hogy ne kelljen olyan nagy számokat írni. Az egy nap alatt felvett összeg

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol X_i az i-edik ember által felvett összeg. S_n várható értéke a szöveg szerint $\mathbb{E}S_n = n \cdot 20 = 10000$.

A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint minden pozitív t-re

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right),$$

ahol a_i és b_i az X_i alsó illetve felső korlátja: esetünkben minden $a_i = 1$ és $b_i = 100$, így a tört nevezője

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 500 \cdot (100-1)^2 = 4900500.$$

Legyen tehát a betöltött pénz $K = \mathbb{E}S_n + t$, ahol

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = 0.01 \quad \text{(és nem pedig 0.99)},$$

vagyis

$$-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \ln(0.01) = -2\ln 10,$$

amiből

$$t = \sqrt{(\ln 10)\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \sqrt{\ln 10 \cdot 4900500} \approx 3359.$$

Tehát $K \approx 10000 + 3359 = 13359$ eFt-tal kell az automatát feltölteni.

Megjegyzés 1 (szőrszálhasogatás): Jó, jó, körülbelül 13359000 forint kell – a számolásból egész pontosan 13359139 forint és 51 fillér jön ki, meg még egy kis apró. Persze, az automatába nem lehet 13359139 forintot és 51 fillért tenni, és elfogyni se tud belőle pont ennyi, mert a legkisebb címlet az ezres. Vagyis, amit beleteszünk, az 1000 Ft-nak többszöröse kell, hogy legyen.

Akkor viszont: elég lesz 13359000 forint, vagy (biztos, ami biztos) legyen inkább 13360000?

Ez a kérdés annyira apróság, hogy a megválaszolásához még egy *nyelvtani* kérdésen is rugóznunk kell. Nevezetesen: a feladat szövege szerint „99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig". Jó, de mit is jelent az, hogy az automata „kifogy"?

1.) A „kifogy" a szó szoros értelmében azt jelenti, hogy az automatában lévő pénz mennyisége 0-ra csökken. Ez történhet úgy, hogy az emberek többet akarnának felvenni, mint amennyi van, ezért néhányan (legalább 1 ember) csalódottan távozik, de azért előtte még felvesz, amennyit tud. Ám történhet úgy is, hogy az utolsó ember pont felveszi az utolsó ezrest (is), elégedetten távozik, és az automata kifogyásából (éppen hogy csak, de) nem lesz gond.

   Eszerint az értelmezés szerint, ha a gépben K eFt van, akkor mi a $\mathbb{P}(S_n \ge K)$ valószínűséget keressük. Márpedig (megint csak eFt-ban számolva) $K = 13359$ esetén a Hoeffding egyenlőtlenség szerint $t = 3359$ választással

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n \ge 13359) = \mathbb{P}(S_n \ge \mathbb{E}S_n + t) &\le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{2\cdot 3359^2}{4900500}\right) \approx 0.01000382 > 1\%.\end{aligned}$$

   Vagyis a $K = 13359$ eFt szűkön, de NEM ELÉG ahhoz, hogy (a Hoeffding egyenlőtlenség alapján) 99%-ig biztosak lehessünk a dolgunkban: kell a 13360 eFt.

2.) Igen ám, de a köznyelvben az automata „kifogyása” nem ezt jelenti, hanem azt, hogy valaki csalódottan távozik, mert többet akarna felvenni, mint amennyi van. Eszerint az értelmezés szerint, ha a gépben K eFt van, akkor mi a $\mathbb{P}(S_n \gneqq K)$ valószínűséget keressük. Így, mivel a $K := 13359$ eFt-ot *meghaladó* legkisebb lehetséges összeg a 13360 eFt, a Hoeffding egyenlőtlenséget $t = 3360$-nal alkalmazva

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n > 13359) &= \mathbb{P}(S_n \geq 13360) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t)\\ &\leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 3360^2}{4900500}\right) \approx 0.009976 < 1\%.\end{aligned}$$

Vagyis a $K = 13359$ eFt szűkön, de ELÉG.

Megjegyzés 2: Ez persze színtiszta matematikus szőrözés (avagy: sport). Egyrészt a feladatban tárgyalt modell több okból is nagyon durva modellje a valóságnak. A valóságban a pénzt felvevő emberek száma maga is véletlen, ráadásul függ attól. hogy hétfő van vagy péntek, tél vagy nyár, mi volt tegnap az újságban, stb. Az egyes emberek viselkedése még csak nem is független: ha sorba kell állnia, könnyen lehet, hogy többet vesz fel. Másrészt a Hoeffding egyenlőtlenség a tényleges valószínűségnek (ebben a helyzetben) elég durva becslése. Vagyis a modellben és a számítási módszerben is nagyságrendekkel nagyobb hiba van, mint amin az előző megjegyzésben szöszmötöltünk.

6.3 Egy vizsgán 120 hallgató jelenik meg, közülük 90 készült, 30 pedig nem. Aki készült, 90% valószínűséggel megy át, aki viszont nem, az csak 30%-kal. Adjuk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a hallgatók legalább fele megbukik.

Megoldás: Legyen $n = 120$ és $k = 1, 2, \dots, n$-re $X_k = 1$, ha a k-adik hallgató megbukik, és $X_k = 0$, ha nem. Legyen $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a bukott hallgatók száma, így $\mathbb{P}(S_n \geq 60)$-ra keresünk nagy eltérés becslést.

Mivel az X_k-k nem azonos eloszlásúak (a készületlenek nagyobb valószínűséggel buknak), a Cramér tétel (közvetlenül) nem alkalmazható, így a Hoeffding-egyenlőtlenséget fogjuk alkalmazni. Ehhez minden k-ra $a_k = 0$, $b_k = 1$-gyel $a_k \leq X_k \leq b_k$, valamint $\mathbb{E}S_n = 90 \cdot 0.1 + 30 \cdot 0.7 = 30$, vagyis $t = 30$ választással a Hoeffding-egyenlőtlenség azt adja, hogy

$$\mathbb{P}(S_n \geq 60) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2)}\right\} = e^{-\frac{2 \cdot 30^2}{120 \cdot 1^2}} = e^{-15} \approx 3.06 \cdot 10^{-7}.$$

6.4 Móricka elhatározza, hogy addig dobál egy dobókockát, amíg 1000-szer ki nem jön neki a hatos. (Persze nem feltétlenül kell az 1000 hatosnak egymás után kijönni.) Valamelyik nagy eltérés tétel segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez legfeljebb 5000 dobásból sikerül neki.

(Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

(ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$

(ha $x > 1$).)

1. a,b megoldás: A kérdés átfogalmazható a következőképpen: Ha Móricka 5000-szer dob a kockával, mennyi a valószínűsége, hogy legablább 1000 dobása lesz 6-os?

Ezért legyen $n = 5000$ és $k = 1, 2, \ldots, n$-re legyen $X_k = 1$ ha a k-adik dobás 6-os, és legyen $X_k = 0$ ha nem.Így az X_k-k függetlenek és $p = \frac{1}{6}$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak. $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a dobott 6-osok száma, a kérdés pedig $\mathbb{P}(S_n \geq 1000)$.

a.) A legkönnyebb megoldást a Hoeffding egyenlőtlenség adja. $\mathbb{E}S_n = np = \frac{5000}{6}$, így legyen $t = 1000 - S_n = \frac{1000}{6}$, $a_k = 0$ és $b_k = 1$ minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re. A Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{2 \cdot \left(\frac{1000}{6}\right)^2}{5000}\right\} \approx e^{-11.1} \approx 0.000015.$$

b.) Pontosabb becslést kaphatunk a Cramér tétel segítségével. Ez is könnyű – ha a segítség alapján tudjuk a rátafüggvényt. Legyen $m = \mathbb{E}X_k = p = \frac{1}{6}$, így a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 1000) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{5}) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [a, b))$, ahol $a = \frac{1}{5}$ és $b = \infty$. Mivel $m < a$, a Cramér tétel azt állítja, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b)\right) \lessapprox e^{-n \cdot I(a)} = e^{-5000 \cdot I(\frac{1}{5})} \approx e^{-19} \approx 0.0000000054.$$

(a Bernoulli eloszlás rátafüggvényét számoltuk ki a segítség alapján $p = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{5}$-ben.)

2. megoldás: A kérdést közvetlenül is nézhetjük: legyen $n = 1000$ és jelentse $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ azt, hogy mennyit kell várnia a 6os első, második, ..., 1000-edik előfordulására (mindig az előző előfordulástól számítva). Így az Y_k-k függetlenek és (optimista) geometriai eloszlásúak $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ pedig az 1000 darab 6-oshoz szükséges dobások teljes száma. A kérdés most $\mathbb{P}(S_n \leq 5000)$.

Vegyük észre, hogy az Y_k-k *nem korlátosak*, így a Hoeffding egyenlőtlenség nem alkalmazható. A Cramér tétel viszont most is működik. Alkalmazásához átírjuk a kérdést $\mathbb{P}(S_n \leq 5000) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq 5) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b])$ alakba, ahol $a = -\infty$ és $b = 5$ Legyen $m = \mathbb{E}Y_k = \frac{1}{p} = 6$. Mivel $b < m$, a Cramér tétel azt állítja, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox e^{-n \cdot I(b)} = e^{-1000 \cdot I(5)} \approx e^{-19} \approx 0.0000000054.$$

(a geometriai eloszlás rátafüggvényét számoltuk ki a segítség alapján $p = \frac{1}{6}$, $x = 5$-ben.)

Megjegyzés: A kérdéses valószínűségnek a centrális határeloszlás tétellel történő becslésére tett minden kísérlet hibás. a CHT nem *nagy eltérés tétel, és egyáltalán nem alkalmas az átlag ilyen szélsőséges értékei ilyen kicsi valószínűségeinek becslésére.*

6.5 Egy vizsgán 400 hallgató vesz részt, és mindegyikük a többitől függetlenül $p = \frac{3}{4}$ valószínűséggel vizsgázik sikeresen. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a résztvevők legalább fele megbukik.

Tipp: a bukottak számát írjuk fel mint független, azonos eloszlású (indikátor) valószínűségi változók összegét.

Tipp: mind a Hoeffding egyenlőtlenség, mind a Cramér tétel használható.

*Vigyázat: a centrális határeloszlás tétellel történő közelítés viszont **nem** nagy eltérés becslés.*

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \qquad \textit{(ha } 0 < x < 1\textit{)}.$$

Megoldás: Legyen $n = 400$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik hallgató átmegy,} \\ 0, & \text{ha megbukik.} \end{cases}$$

így $S_n := x_1 + X_2 + \ldots X_n$ a sikeresen vizsgázók száma, a kérdés pedig a $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség. Az X_i valószínűségi változók függetlenek és azonos, $p = \frac{3}{4}$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak.

a.) A $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség becsléséhez használhatjuk a Hoeffding egyenlőtlenséget, mivel az X_i-k korlátosak: $a_i \leq X_i \leq b_i$ ahol $a_i = 0$ és $b_i = 1$ minden i-re, amiből $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2) = \sum_{i=1}^n (1-0)^2) = n \cdot 1^2 = n = 400$. Ezen felül $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_i = np = 300$ és $\frac{n}{2} = 200$, így $t = 100$ választással a Hoeffding egyenlőtlenség miatt

$$\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}S_n - t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2)}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 100^2}{400}\right) = e^{-50}$$

vagyis

$$\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) \leq e^{-50} \approx 1,93 \cdot 10^{-22}.$$

b.) A $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2})$ valószínűség becsléséhez a Cramér tétel is használható, mivel az X_i-k azonos eloszlásúak és az eloszlásuk pontosan ismert. Ráadásul meg van adva a Cramér féle rátafüggvényük, így még számolni se kell sokat. A kérdéses valószínűséget $\mathbb{P}(S_n \leq \frac{n}{2}) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right)$ alakba írjuk $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ választással. Mivel $m = \mathbb{E}X_i = p = \frac{3}{4}$-del $b < m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)},$$

ahol I a $p = \frac{3}{4}$ paraméterű Bernoulli eloszlásnak a feladatban megadott Cramér féle rátafüggvénye. Ezért

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1}{2(1-p)}\right) = \cdots = -\ln\sqrt{4p(1-p)},$$

amiből

$$e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)} = (4p(1-p))^{n/2}.$$

Esetünkben $n = 400$ és $p = \frac{3}{4}$, így

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) \lessapprox \left(4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right)^{\frac{400}{2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{200} \approx 1,03 \cdot 10^{-25}.$$

Látható, hogy ebben az esetben a Cramér tétel 1000-szer jobb becslést ad, mint a Hoeffding egyenlőtlenség.

6.6 Egy 45 pontos ZH-n a hallgatók hosszú évek tapasztalata szerint átlagosan 29 pontot szoktak elérni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy idén a 130 hallgató átlaga legfeljebb 20 pont lesz. *(Tegyük fel, hogy a feladatsor ugyanolyan nehéz, mint máskor, és a hallgatók is ugyanolyan felkészültek, mint máskor. Az egyes hallgatók eredményei függetlenek. Negatív pontszámot nem lehet elérni.)*

Megoldás: Legyen $n = 130$ és legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re X_i az i-edik hallgató pontszáma. Így $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ az évfolyam összpontszáma. Feladat a $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq 20) = \mathbb{P}(S_n \leq 2600)$ valószínűség becslése.

A feladat szerint az X_i-k függetlenek és korlátosak: $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 45$. Egyébként az eloszlásukról semmit nem tudunk – nincs okunk pl. feltételezni, hogy azonos eloszlásúak lennének. Így a Cramér féle nagy eltérés tétel nem használható.

Szerencsére tudjuk viszont az *összeg* várható értékét. Pontosabban, a szöveg szerint $\mathbb{E}\frac{S_n}{n} = 29$, amiből $\mathbb{E}S_n = 29n = 3770$. A Hoeffding egyenlőtlenség alkalmazásához ez éppen elég: Hoeffding szerint $t \geq 0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}S_n - t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right\}.$$

Esetünkben $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 130(45-0)^2 = 263250$, így $t := 3770 - 2600 = 1170$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \leq 2600) = \mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}S_n - t) \leq \exp\left\{-\frac{2 \cdot 1170^2}{263250}\right\} = e^{-10.4} \approx 3 \cdot 10^{-5}.$$

6.7 Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x\ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

1. Megoldás: Legyen $n = 400$ és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos 1 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók: azt jelentik, hogy az egyes hívások között mennyi idő telik el (percben). Így $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a 400-adik hívás ideje, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \leq 300)$. Erre a Hoeffding-egyenlőtlenség *nem alkalmazható*, mert az X_k-k nem korlátosak. Marad a Cramér tétel. Ehhez a kérdéses valószínűséget $\mathbb{P}(S_n \leq 300) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (0, \frac{3}{4}]) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b])$ alakba írjuk. Mivel $\mathbb{E}X_k = m$-re $b < m$, a Cramér tétel szerint (az exponenciális eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 1$-gyel)

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-400I(\frac{3}{4})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

2. Megoldás: Vegyük észre, hogy a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, ezért az 1 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 1$ várható értékkel, és az egyes percek függetlenek. Így ha $n = 300$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ az 5 óra alatt befutott hívások száma, ahol $X_k \sim Poi(1)$, akkor a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 400)$. Mivel $\frac{4}{3} > m = \mathbb{E}X_k = 1$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 1$-gyel)

$$\mathbb{P}(S_n \geq 400) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [\frac{4}{3}, \infty)\right) \lessapprox e^{-300 \cdot I(\frac{4}{3})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

3. Megoldás: Pontosan ugyanezt kapjuk akkor is, ha egybevesszük az 5 óra alatt érkező összes hívást: a 300 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 300$ várható értékkel. Így alkalmazhatjuk a Cramér tételt az $S_n = X_1$ egytagú összegre ($n = 1$), ahol $X_1 \sim Poi(300)$, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 400)$. Mivel $400 > m = \mathbb{E}X_1 = 300$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 300$-zal)

$$\mathbb{P}(S_n \geq 400) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [400, \infty)\right) \leq e^{-1 \cdot I(400)} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

6.8 Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 2,5 órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\text{ha } x > 0).$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\text{ha } x > 0).)$$

1. Megoldás: Legyen $n = 400$ és $X_1, X_2, \ldots, X_n$ az egyes hívások között eltelt idő percben. A feladat szerint ezek függetlenek és azonos 2 paraméterű exponenciális eloszlásúak (mivel a várható értékük $\frac{1}{2}$. Így $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a 400-adik hívás ideje, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \leq 150)$. Erre a Hoeffding-egyenlőtlenség *nem alkalmazható*, mert az X_k-k nem korlátosak. Marad a Cramér tétel. Ehhez a kérdéses valószínűséget $\mathbb{P}(S_n \leq 150) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (0, \frac{3}{8}]) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b])$ alakba írjuk. Mivel $\mathbb{E}X_k = m = \frac{1}{2}$-re $b < m$, a Cramér tétel szerint (az exponenciális eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 2$-vel)

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b]) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-400 I(\frac{3}{8})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

2. Megoldás: Vegyük észre, hogy a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, ezért az 1 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 2$ várható értékkel, és az egyes percek függetlenek. Így ha $n = 150$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a 2,5 óra alatt befutott hívások száma, ahol $X_k \sim Poi(2)$, akkor a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 400)$. Mivel $\frac{8}{3} > m = \mathbb{E}X_k = 2$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 2$-vel)

$$\mathbb{P}(S_n \geq 400) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [\frac{8}{3}, \infty)) \lessapprox e^{-150 \cdot I(\frac{8}{3})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

3. Megoldás: Pontosan ugyanezt kapjuk akkor is, ha egybevesszük a 2,5 óra alatt érkező összes hívást: a 150 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 300$ várható értékkel. Így alkalmazhatjuk a Cramér tételt az $S_n = X_1$ egytagú összegre ($n = 1$), ahol $X_1 \sim Poi(300)$, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 400)$. Mivel $400 > m = \mathbb{E}X_1 = 300$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 300$-zal)

$$\mathbb{P}(S_n \geq 400) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [400, \infty)) \leq e^{-1 \cdot I(400)} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

6.9 Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 1000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen,

a.) a Hoeffding egyenlőtlenség segítségével,

b.) a Cramér tétel segítségével.

c.) Es akkor mi jön ki, ha $n = 10000$?

(Tipp: Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás.)

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = -x \ln \frac{p}{x} - (1 - x) \ln \frac{1 - p}{1 - x}.$$

Megoldás: Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a helyes válaszok száma. Kérdés a

$$\mathbb{P}\left(S_n \leq \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right)$$

valószínűség. Az X_i-k függetlenek és Bernoulli eloszlásúak $p = 0.55$ paraméterrel, vagyis $m := \mathbb{E}X_i = p = 0.55$.

a.) Az X_i-k korlátosak $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 1$ korlátokkal. A Hoeffding egyenlőtlenséghez kelleni fog, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = n(1 - 0)^2 = n = 1000.$$

$\mathbb{E}S_n = nm = 550$, így $t = 50$ választással a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \leq 500) = \mathbb{P}(S_n \leq \mathbb{E}S_n - t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\} = e^{-5} \approx 0.0067.$$

b.) A kérdés $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right)$, ahol $a = -\infty$ és $b = \frac{1}{2}$. mivel $b = \frac{1}{2} < 0.55 = m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a.b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-1000 I(\frac{1}{2})},$$

ahol I a $p = 0.55$ paraméterű Bernoulli eloszlás rátafüggvénye, vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \ln \frac{p}{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \ln \frac{q}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(4pq).$$

esetünkben $I(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \ln(0.99) \approx 0.005025$, így

$$\mathbb{P}(S_n \leq 500) \lessapprox e^{-1000 \cdot 0.005025} = e^{-5.025} \approx 0.0066.$$

c.) $n = 10000$ esetén a Hoeffding egyenlőtlenségből

$$\mathbb{P}(S_{10000} \leq 5000) \leq e^{-50} \approx 1.93 \cdot 10^{-22}$$

jön ki, a Cramér tételből pedig

$$\mathbb{P}(S_{10000} \leq 5000) \lessapprox e^{-50.25} \approx 1.50 \cdot 10^{-22}.$$

6.10 Egy nagy országban a sok szavazó 2 pártra oszlik: 70%-uk a „Mindenkit Utálunk" párt (MU) híve, 30%-uk pedig a „Becsüljetek Minket" párt (BM) támogatója. Egy közvéleménykutató intézet 500 szavazót kérdez meg a pártszimpátiájáról. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a kutatás a BM pártot mutatja erősebbnek.

Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$

Megoldás: Legyen $n = 500$ és $i = 1, 2, \ldots, n$-re az X_i valószínűségi változó

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik megkézdezett BM-támogató} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az X_i-k függetlenek és $p = 0.3$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a megkérdezett BM-támogatók száma. A feladat a $\mathbb{P}(S_n > 250) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right)$ valószínűség becslése.

1. megoldás: A Cramér tételt alkalmazzuk a $p = 0.3$ paraméterű Bernoulli eloszlásra hogy megbecsüljük a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b)\right)$ valószínűséget, ahol $a = \frac{1}{2}$ és $b = \infty$. A várható érték $m = p = 0.3$, ezért $m < a$, így

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a,b)\right) \lessapprox e^{-nI(a)} = e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

A segítségben megadott rátafüggvénybe behelyettesítve $x = \frac{1}{2}$-et

$$e^{-nI\left(\frac{1}{2}\right)} = \exp\left[-n\left(\frac{1}{2} \ln \frac{(1-p)\frac{1}{2}}{p(1-\frac{1}{2})} - \ln \frac{1-p}{1-\frac{1}{2}}\right)\right] = \cdots = \sqrt{4pq}^{\,n}, \tag{3}$$

ahol $q = 1 - p$. Konkrétan $n = 500$, $p = 0.3$-ra

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{1}{2}\right) \lessapprox \sqrt{4 \cdot 0.3 \cdot 0.7}^{\,500} \approx 1.17 \cdot 10^{-19}.$$

(Megjegyzés: persze nem szükséges a (3)-beli szép leegyszerűsített képletet kiszámolni vagy előadásról tudni – elég numerikusan behelyettesíteni $n = 500$, $x = 0.5$, $p = 0.3$-at.)

2. megoldás: Mivel az X_i-k korlátosak $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 1$ korlátokkal, használhatjuk a Hoeffding egyenlőtlenséget is. $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 500 \cdot (1-0)^2 = 500$, valamint $\mathbb{E}S_n = np = 500 \cdot 0.3 = 150$, vagyis $t = 100$ választással

$$\mathbb{P}(S_n > 250) = \mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2 \cdot 100^2}{500}\right) = e^{-40} \approx 4.25 \cdot 10^{-18}.$$

(Megjegyzés: látható, hogy a Hoeffding egyenlőtlenség durvább felső becslést ad, mint a Cramér tétel.)

6.11 Egy épülő szennyvíztisztító üzem kapacitása 320000 liter/nap. A szennyvíztisztító 1500 háztartást szolgál ki, melyeket a következő kategóriákba sorolnak:

- kicsi, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 100 liter, de semmiképpen nem több, mint 300 liter;
- közepes, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 200 liter, de semmiképpen nem több, mint 500 liter;
- nagy, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 300 liter, de semmiképpen nem több, mint 800 liter.

Az egyes kategóriákba tartozó háztartások száma rendre 400, 800 illetve 300. Az egyes háztartások napi szennyvíztermelése függetlennek tekinthető.

a.) Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy egy adott napon az üzem nem képes a termelt szennyvizet megtisztítani.

b.) Az üzemeltető elégedetlen az előző részben kijött eredménnyel. Adjunk felső becslést arra, hogy mekkorára növeljék az üzem kapacitását ahhoz, hogy a túllépés kockázata 10^{-8} alá csökkenjen.

Megoldás: Jelöljük X_i-vel az i-edik háztartás egynapi szennyvíztermelését literben, legyen $n = 1500$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Az X_i-k függetlenek és korlátosak: egy valószínűséggel $a_{\leq} X_i \leq b_i$, ahol minden $a_i = 0$, továbbá 400 db i-re $b_i = 300$, 800 db i-re $b_i = 500$ és 300 db i-re $b_i = 800$. Az átlagokat figyelembe véve $\mathbb{E}S_n = 400 \cdot 100 + 800 \cdot 200 + 300 \cdot 300 = 290000$.

a.) A feladat szerint a $\mathbb{P}(S_n \geq 320000)$ valószínűségre keresünk becslést. A Hoeffding egyenlőtlenség szerint $t = 30000$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \geq 320000) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_1)^2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2 \cdot 30000^2}{400 \cdot (300-0)^2 + 800 \cdot (500-0)^2 + 300 \cdot (800-0)^2}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{2 \cdot 30000^2}{428000000}\right\} \approx$$

$$\approx e^{-4.21} \approx 0.015.$$

b.) Ha azt akarjuk, hogy a túllépés kockázata egészen biztosan 10^{-8} alatt legyen, akkor válasszuk a kapacitást $\mathbb{E}S_n + t$-nek, ahol t olyan, hogy

$$\exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_1)^2}\right\} = 10^{-8}.$$

Ezt az egyenletet megoldva

$$t = \sqrt{-214000000\ln(10^{-8})} \approx 62786,$$

vagyis $\mathbb{E}S_n + t = 290000 + 62786 = 352786$ literes napi kapacitás biztosan elegendő. *Megjegyzés: Ahogy a feladat szövege is fogalmaz, ez egy* ***felső becslés*** *arra a kritikus kapacitásra, amivel a 10^{-8}-os hibavalószínűség biztosítható.*

6.12 Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

c.) X_k egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

d.) X_k egyenletes a $[0, k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

e.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k+1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

Megoldás: A Hoeffding-egyenlőtlenség akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, korlátosak és az összeg várható értéke ismert. A Cramér tétel akkor használható, ha az X_k-k függetlenek, azonos eloszlásúak, és az eloszlásuk ismert (plusz egy enyhe technikai feltétel a momentumgeneráló függvényről). Ennek alapján

	Hoeffding	Cramér
a.)	NEM, mert nem korlátosak	IGEN
b.)	IGEN	NEM, mert ismeretlen az eloszlás
c.)	IGEN	IGEN
d.)	IGEN	NEM, mert nem azonos eloszlásúak
e.)	NEM, mert nem függetlenek	NEM, mert nem függetlenek

6.13 Egy koncessziós pályázat 10 fejezetből áll, a pályázók minden fejezetre legfeljebb 5 pontot kaphatnak. A bírálók a megítélt pontszámot fejezetenként kockadobással döntik el, azonos esélyt adva a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ pontszámoknak. A felhívásra 10000 pályázat érkezik. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a pályázatok átlagos pontszáma eléri a 26-ot. *(Vigyázat: hányszor is gurítják el a bírálók azt a dobókockát?)*

(A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x\ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \quad \textit{(ha } 0 < x < 1\textit{).)}$$

Megoldás: $n = 100000$ kockadobás történik, ennyi pályázat-fejezet pontszámát kell összeadni, amik függetlenek és egyenletesek a $\{0,1,2,3,4,5\}$ halmazon. Legyen X_i ezek közül az i-edik ($i = 1,2,\dots,n$). Így $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ az össz-pontszám, és a kérdés

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{10000} \geq 26\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geq 260000\right) = ?$$

Az X_i-k függetlenek és korlátosak: $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 5$ minden i-re, vagyis a Hoeffding egyenlőtlenség használható a nagy eltérés becslésre. Ehhez $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = n(5-0)^2 = 25n = 2500000$, valamint $\mathbb{E}S_n = n\mathbb{E}X_i = n \cdot \frac{5}{2} = 250000$. Így $t := 10000$ választással

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{10000} \geq 26\right) &= \mathbb{P}\left(S_n \geq 260000\right) = \mathbb{P}\left(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t\right) \leq \\ &\leq \exp\left\{\frac{-2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}\right\} = \exp\left\{\frac{-2 \cdot 10000^2}{2500000}\right\} = e^{-80} \approx 1.8 \cdot 10^{-35}.\end{aligned}$$

(Megjegyzés: a nagy eltérés becsléshez elvileg a Cramér tétel is használható lenne, de az itt szereplő, $\{0,\dots,5\}$-ön egyenletes eloszlás rátafüggvénye csúnya, és nem volt megadva. A feladatban megadott Bernoulli rátafüggvény itt nem jó semmire.)

6.14 Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos Bernoulli eloszlású valószínűségi változók sorozata $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel (vagyis $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}$). Legyen $n = 10^6$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (vagyis $S_n \sim Bin(n = 10^6; p = \frac{1}{2})$).

a.) Ha valamilyen $K \in (0; 10^6)$-ra a $\mathbb{P}(S_n < K)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)

b.) A Hoeffding egyenlőtlenség segítségével keressünk olyan K korlátot, amire biztosan igaz, hogy

$$\mathbb{P}(S_n \geq K) \leq 10^{-8}.$$

Nevezzük ezt a K korlátot K_H-nak.

c.) Közelítsük a $\mathbb{P}(S_n \geq K_H)$ valószínűséget a Cramér tétel segítségével! Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

Megoldás:

a.) A Berry-Esseen tétel szerint a normális közelítés hibája legfeljebb $\frac{C\rho}{\sigma^3\sqrt{n}}$, ahol $C = 0.4748$, $n = 10^6$, $\sigma = \sqrt{D^2X_i} = \frac{1}{2}$ és $\rho = \mathbb{E}(|X_i - m|^3)$, ahol $m = \mathbb{E}X_i = \frac{1}{2}$, vagyis $\rho = \frac{1}{2}|0 - \frac{1}{2}|^3 + \frac{1}{2}|1 - \frac{1}{2}|^3 = \frac{1}{2}\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$. Összerakva:

$$\text{hiba} \leq \frac{0.4748 \cdot \frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \sqrt{10^6}} = \frac{0.4748 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}\,1000} = 4.748 \cdot 10^{-4}.$$

b.) A Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right).$$

Esetünkben $n = 10^6$, $\mathbb{E}S_n = np = 5 \cdot 10^5$, és mindegyik $a_k = 0$, $b_k = 1$. Legyen tehát

$$K_H = \mathbb{E}S_n + t = 5 \cdot 10^5 + t$$

és

$$10^{-8} = \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2t^2}{10^6(1-0)^2}\right).$$

Ez utóbbiból $-8\ln 10 = -\frac{2t^2}{10^6}$, vagyis $t = \sqrt{4 \cdot 10^6 \ln 10} = 2000\sqrt{\ln 10} \approx 3034.85$. Ezt visszaírva

$$K_H = 500000 + 2000\sqrt{\ln 10} \approx 503034.85$$

c.) A Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right) \approx e^{n \inf_{a<x<b} I(x)}.$$

Célunk a $\mathbb{P}(S_n > K_H)$ valószínűség becslése, tehát ezt először a fenti alakúra kell írni:

$$\mathbb{P}(S_n > K_H) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > \frac{K_H}{n}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \left(\frac{K_H}{n}, \infty\right)\right),$$

vagyis a Cramér tételt $a = \frac{K_H}{n} \approx 0.50303485$, $b = \infty$-vel alkalmazzuk. Ekkor $a > m = \frac{1}{2}$, ezért $\inf_{a<x<b} I(x) = I(a)$. Esetünkben $I(x) = x \ln \frac{x}{1-x} - \ln \frac{1/2}{1-x}$, amiből $I(a) \approx 1.842079 \cdot 10^{-5}$, és

$$\mathbb{P}(S_n > K_H) \approx e^{-18.42079} \approx 0.9999 \cdot 10^{-8}.$$

Vigyázat: aki menet közben meggondolatlanul kerekít, teljesen rossz eredményt kaphat. Pl. aki az $a \approx 0.50303485$-öt dőre módon $a \approx 0.5$-re cseréli, az $0.9999 \cdot 10^{-8}$ helyett $\frac{1}{2}$-et kap végeredményül, ami nagyon nem mindegy. (Hát persze: $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (0.5, \infty)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} > m\right) \approx \frac{1}{2}$. Az egész történet arról szól, hogy az átlag kis valószínűséggel, de eltérhet a várható értéktől.) De még ha valaki $a \approx 0.50303485$ helyett $a \approx 0.503$-mal számol, akkor is $1.52 \cdot 10^{-8}$-t kap végeredménynek, ami még mindig 50%-os hiba. Hát persze: nagyon nem mindegy, hogy az S_n-nek a várható értékétől való eltérése 3000, vagy 3034.85: A Cramér tétel pont azt mondja, hogy kicsit jobban eltérni is sokkal valószínűtlenebb.

6.15 Egy internet-szolgáltatónak 3600 előfizetője van. Hétfőn este 8-kor minden előfizető a többiektől független véletlen sávszélesség-igénnyel lép fel, ami Mbit/s-ben mérve egyenletes eloszlású a $[0; 4]$ intervallumon. A szolgáltatásban akkor lesz fennakadás, ha az igények összege túllépi a rendelkezésre álló 8000 Mbit/s teljes sávszélességet.

a.) A szolgáltató a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak a valószínűségét, hogy hétfő este 8-kor fennakadás lesz. Legfeljebb mennyit fog a szolgáltató *tévedni* a becsléssel a Berry-Esséen tétel szerint?

b.) Adjunk becslést a fennakadás valószínűségére a Hoeffding-egyenlőtlenség segítségével.

Megoldás: Legyen X_i az i-edik előfizető sávszélesség-igénye Mbit/s-ben mérve ($i = 1, \ldots, n$), $n = 3600$, és $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ az össz sávszélesség igény.

a.) A CHT becslés hibája Berry-Esséen tétel szerint legfeljebb $\frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3}$, ahol $C = 0.4748$, σ az X_i-k szórása és $\delta = \mathbb{E}\left(|X_i - \mathbb{E}X_i|^3\right)$. Esetünkben X_i egyenletes $[0;4]$-en, így $m := \mathbb{E}X_i = 2$, $\sigma = 4\sqrt{12}$ (képletgyűjteményből) és

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|x-m|^3 \,\mathrm{d}x = \int_0^4 \frac{1}{4}|x-2|^3 = \cdots = 2.$$

Összerakva: a CHT becslés hibája legfeljebb $\frac{0.4748\cdot 2}{\sqrt{3600}\left(\frac{4}{\sqrt{12}}\right)^3} \approx 0.0103 = 1.03\%$.

b.) Az X_i val-változók alsó és felső korlátjai $a_i = 0$ illetve $b_i = 4$ minden i-re. $\mathbb{E}S_n = n\cdot m = 7200$, vagyis $t = 800$ választással a Hoeffding-egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot 800^2}{3600\cdot 4^2}\right) \approx e^{-22.222},$$

vagyis

$$\mathbb{P}(S_n > 8000) \leq 2.2\cdot 10^{-10}.$$

7. Diszkrét idejű Markov láncok

7.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1,2,3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50-50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

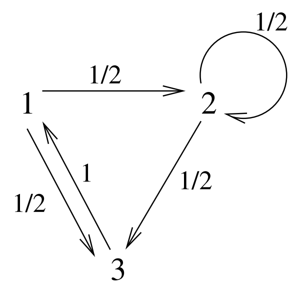
f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?

h.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

Megoldás:

a.) A gráf-reprezentáció



b.) Az átmenetmártix $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c.) A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, mert mindhárom állapotnak azonos esélyt adtunk.

d.)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(131223) &= \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 2, X_5 = 3) = \\ &= \pi_1(0) P_{13} P_{31} P_{12} P_{22} P_{23} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

e.) Az 1-es állapotból az 1-esbe négy lépésben visszajutni csak kétféleképpen lehet: $1 \to 2 \to 2 \to 3 \to 1$, vagy $1 \to 3 \to 1 \to 3 \to 1$. Ezek feltételes val.sége (feltéve, hogy $X_0 = 1$) $P_{12}P_{22}P_{23}P_{31} = \frac{1}{8}$, illetve $P_{13}P_{31}P_{13}P_{31} = \frac{1}{4}$, így

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

f.) Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy π stacionárius eloszlás (sorvektor) van, éspedig a

$$(P^T - I)\pi^T = 0$$

lineáris egyenletrendszer egyetlen olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. (Itt I az egységmátrix.) Jelen esetben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

vagyis a lineáris egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt megoldjuk pl. Gauss eliminációval:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

amiből $\pi_1 = \pi_3$ és $\pi_1 = \pi_2$. Így pl. a $\pi_3 := 1$ önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását: $\tilde{\pi} = (1\,1\,1)$. Ez még nem az, amit keresünk, mert az elemek összege nem 1, hanem $1 + 1 + 1 = 3$, ezért a keresett megoldást úgy kapjuk, hogy ezt a $\tilde{\pi}$-t lenormáljuk, vagyis leosztjuk 3-mal:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

g.) A Markov lánc irreducibilis, aperiodikus és véges állapotterű, $n = 100$ lépés pedig hosszú idő, ezért a Markov láncok alaptétele értelmében a kezdeti eloszlástól függetlenül

$$\mathbb{P}(X_{100} = 2) \approx \pi_2 = \frac{1}{3}.$$

h.) Az f függvényt célszerű oszlopvektor formájába írni:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért az ergodtétel értelmében az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon 1 valószínűséggel a stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez tart:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_0) + f(X_1) + \cdots + f(X_{n-1})}{n} = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 5 = 2.$$

7.2 Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a $0, 1, 2, 3, 4$ állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy értve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.

b.) Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440” megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)

c.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a valószínűsége, hogy 3 időegység múlva a program éppen az 1-es részfeladaton dolgozik?

d.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?

e.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?

f.) A programunk processzor-igénye üresjáratban 1%, az $1, 2, 3, 4$ részfeladatok végrehajtása során pedig rendre 10%, 30%, 50% illetve 99%. mennyi az átlagos processzor-terhelés hosszú távon?

Megoldás:

a.) Az n idő elteltével felvett állapotot jelöljük X_n-nel. Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. P sorait és oszlopait ilyen sorrendbe írva

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

b.) $\mathbb{P}(X_0 \dots X_9 = 0001223440 | X_0 = 0) = P_{00} \cdot P_{00} \cdot P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \cdot P_{44} \cdot P_{40} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64000}$.

c.) A lehetséges utak a 0001, a 0011 és a 0111. Ezek valószínűségeit az előző pontbeli módon kiszámolva és összeadva $\mathbb{P}(X_3 = 1 | X_0 = 0) = P_{00}P_{00}P_{01} + P_{00}P_{01}P_{11} + P_{01}P_{11}P_{11} = \frac{9}{10}\frac{9}{10}\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\frac{1}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$.

d.) Az 1000 időegység elteltével kialakuló valószínűségeket közelítsük a Markov lánc stacionárius eloszlásával! Ehhez a $\pi P = \pi$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol a π ötelemű sorvektor tartalmazza a stacionárius eloszlást. Átrendezés után $(P^T - \mathbb{I})\pi^T = \underline{0}$, ahol $\mathbb{I}$ az 5×5-ös egységmátrixot, $\underline{0}$ pedig az öt nullából álló oszlopvektort jelöli. A lineáris egyenletrendszerek szokásos mátrix-jelölésével

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt persze eliminációval oldjuk meg. Egy sor kiesik, ahogy kell, és a végén (pl.) az marad, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

vagyis az egyenletrendzser egyik megoldása az $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ vektor. A stacionárius eloszlás ennek valószínűségi vektorrá normált változata (ahol az elemek összege 1), vagyis

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Végül a feladat kérdésére a válasz:

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0 | X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{5}{9}.$$

e.) A Markov láncunk véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, ezért az ergodtétel szerint hosszú távon a 0-s állapot bekövetkezési gyakorisága majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti valószínűséghez:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k : 1 \le i \le n \text{ és } X_k = 0\} = \pi_0 = \frac{5}{9} \approx 55.6\%.$$

f.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a processzorigény (százalékban számolva) az állapot függvényében:

$$f(i) = \begin{cases} 1, \text{ ha } i = 0 \\ 10, \text{ ha } i = 1 \\ 30, \text{ ha } i = 2 \\ 50, \text{ ha } i = 3 \\ 99, \text{ ha } i = 4 \end{cases},$$

ami helyett elég egy oszlopvektort leírni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 99 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint f időátlaga majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti sokaságátlaghoz. Sokféle különböző jelöléssel leírva ugyanazt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) &= \int_S f \,\mathrm{d}\pi = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \pi_3 \pi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 99 \end{pmatrix} \\ &= 1\pi_0 + 10\pi_1 + 30\pi_2 + 50\pi_3 + 99\pi_4 = \\ &= 1 \cdot \frac{5}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} + 30 \cdot \frac{1}{9} + 50 \cdot \frac{1}{9} + 99 \cdot \frac{1}{9} = \frac{194}{9} \approx 21.6 \end{aligned}$$

7.3 John megfigyelései szerint reggelente, amikor Londonban munkába autózik, háromféle lehet az időjárás: *esik*, *zuhog* vagy *szakad*. Tapasztalata szerint egy nap időjárásából következtetni lehet a következő nap időjárására, az alábbi valószínűségi értelemben:

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma esik}) = 1/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma esik}) = 6/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma szakad}) = 2/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma szakad}) = 4/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma zuhog}) = 5/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap zuhog}|\text{ma zuhog}) = 4/10.$$

Jelöljük az időjárás állapotait számokkal: $0 :=$ „esik”, $1 :=$ „zuhog”, $2 :=$ „szakad”. Modellezzük John reggeli megfigyeléseinek sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot. (Vigyázat: a fenti átmenet-valószínűségek összevissza vannak megadva.)

b.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége a „00012” megfigyelés-sorozatnak (*elsejével* kezdve)?

c.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége, hogy harmadikán zuhog?

d.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a közelítő valószínűsége, hogy huszonkilencedikén zuhog?

e.) Hosszú távon a reggelek hány százalékán zuhog?

f.) Ha esik, John 20 percet autózik dugóban, ám ha zuhog, akkor 30-at, ha szakad, akkor pedig 70-et. Napi átlagban hány percet tölt reggeli dugóban autózással hosszú távon?

Megoldás:

a.) A $0, 1, 2$ állapotokat rendre a mátrix 1., 2. ill, 3. sorához és oszlopához rendelve

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

b.) $\mathbb{P}(00012|X_0 = 0) = P_{00}P_{00}P_{01}P_{12} = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.0015$

c.)

$$(P^2)_{01} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 0.03 + 0.12 + 0.24 = 0.39$$

d.) A 28 nap elteltével kialakuló valószínűségeket közelítsük a Markov lánc stacionárius eloszlásával! Ehhez a $\pi P = \pi$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol a π háromelemű sorvektor tartalmazza a stacionárius eloszlást. Átrendezés után $(P^T - \mathbb{I})\pi^T = \underline{0}$, ahol $\mathbb{I}$ a 3×3-as egységmátrixot, $\underline{0}$ pedig a három nullából álló oszlopvektort jelöli. A lineáris egyenletrendszerek szokásos mátrix-jelölésével

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.9 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & -0.6 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt persze eliminációval oldjuk meg. Egy sor kiesik, ahogy kell, és a végén (pl.) az marad, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{51} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{42}{51} & 0 \end{array}\right),$$

vagyis az egyenletrendzser egyik megoldása a $\begin{pmatrix} 16 & 42 & 51 \end{pmatrix}^T$ vektor. A stacionárius eloszlás ennek valószínűségi vektorrá normált változata (ahol az elemek összege 1), vagyis

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{16}{109} & \frac{42}{109} & \frac{51}{109} \end{pmatrix}.$$

Végül a feladat kérdésére a válasz:

$$\mathbb{P}(X_{29} = 1|X_1 = 0) \approx \pi_1 = \frac{42}{109} \approx 0.38532$$

e.) A Markov láncunk véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, ezért az ergodtétel szerint hosszú távon az 1-es állapot bekövetkezési gyakorisága majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti valószínűséghez:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\{k : 1 \leq i \leq n \text{ és } X_k = 1\} = \pi_1 = \frac{42}{109} \approx 0.38532$$

f.) Jelölje $S = \{0; 1; 2\}$ az állapotteret és legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a dugóban töltött percek száma az állapot függvényében:

$$f(i) = \begin{cases} 20, & \text{ha } i = 0 \\ 30, & \text{ha } i = 1 \\ 70, & \text{ha } i = 2 \end{cases},$$

ami helyett elég egy oszlopvektort leírni:

$$f = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint f időátlaga majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti sokaságátlaghoz. Sokféle különböző jelöléssel leírva ugyanazt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) &= \int_S f \, \mathrm{d}\pi = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= 20\pi_0 + 30\pi_1 + 70\pi_2 = \frac{5150}{109} \approx 47.248 \end{aligned}$$

7.4 Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

c.) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

d.) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

Megoldás:

a.) Az állapottér legyen $S = 1, 2, 3, 4$, és számozzuk a sarkokat az északnyugatitól kezdve, órajárással ellentétes irányban. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

b.)

$$(P^2)_{11} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

amit persze úgy is el lehet mondani, hogy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ val.séggel marad végig ahol volt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ val.séggel elmegy órairányba aztán visszajön, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ val.séggel pedig fordítva.

c.) Egy óra hosszú idő, közelítsünk a stacionárius eloszlással, vagyis oldjuk meg a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. **A transzponálás nagyon fontos.** Az egyenletrendszer mátrixos alakban, az áttekinthetőség kedvéért néggyel végigszorozva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Innentől

i.) Szabad megsejteni, hogy szimmetria-okból a stacionárius eloszlás az egyenletes, aztán leellenőrizni, hogy a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$ tényleg kielégíti az egyenletrendszert, *vagy*

ii.) szabad észrevenni, hogy az eredeti P mátrixnak nem csak a sorösszegei nullák, hanem az oszlopösszegei is, majd hivatkozni az előadásra, miszerint ilyenkor a stacionárius eloszlás egyenletes (ehhez igazából fel se kell írni az egyenletrendszert), *vagy*

iii.) szabad megoldani az egyenletrendszert.

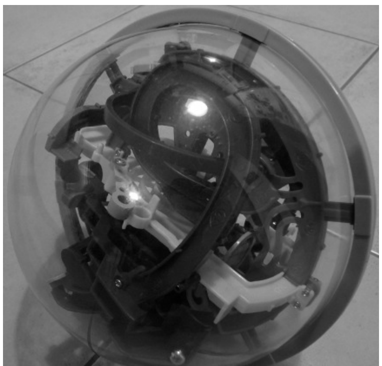
Mindenképpen arra jutunk, hogy $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. A feladat kérdésére a válasz $\pi_3 = \frac{1}{4}$.

d.) Legyen $f : S \to \{0; 1\}$ a napon levés indikátorfüggvénye, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 4, \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon $\sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_1 + \pi_4 = \frac{1}{2}$.

7.5 Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



Magical Intellect Ball

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

Megoldás:

a.) Az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapottérrel

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) Keressük a π stacionárius eloszlást, amihez megoldjuk a $(P-I)^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

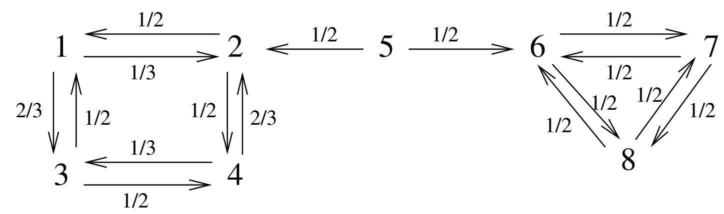
Ennek megoldása az $\sum_{i\in S}\pi_i$ normálási feltételt is figyelembe véve

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

vagyis a Markov lánc a 0 állapotban van legtöbbször (hát persze), éspedig az ergodtétel értelmében hosszú távon a lépések $\frac{4}{10}$-ében. (A lánc irreducibilis és aperiodikus, az ergodtételt az egyes állapotok indikátorfüggvényeire alkalmazhatjuk.)

c.) A lépések $\frac{4}{10}$-ében próbálkozik Móricka az 1-es akadállyal, ezen belül mindig $\frac{1}{4}$ val.séggel bukik el, vagyis a lépések $\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$-ében éppen az 1-es akadályt bukja. Hasonlóan a 2-es és 3-as akadályt is a lépések $\frac{1}{10}$-ében bukja, vagyis **hosszú távon mindhárom akadályon ugyanannyiszor, az összes bukás $\frac{1}{3}$-ában bukik.**

7.6 Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx ?$

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 1) \approx ?$

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 6) \approx ?$

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 5) \approx ?$

Megoldás: A Markov lánc NEM irreducibilis. Három osztálya közül kettő zárt: a $C_1 := \{1, 2, 3, 4\}$ osztály periódusa 2, a $C_2 := \{6, 7, 8\}$ osztály pedig aperiodikus, mert pl. 6-ból 6-ba vissza lehet jutni 2 és 3 lépésben is. Így

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx \frac{1}{3}$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban. A Markov lánc ide megszorítva irreducibilis és aperiodikus, így a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az eloszlás a stacionáriussal közelíthető. A C_2 irreducibilis komponensen a(z egyetlen) π stacionárius eloszlás szimmetria okból az egyenletes, így $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 6) \approx \pi_7 = \frac{1}{3}$.

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) = 0$, mert 1-ből indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, ez viszont periodikus 2 periódussal, így páros sok lépésben csak 1-be és 3-ba juthatunk el.

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) = 0$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, vagyis 2-be nem lehet eljutni.

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx \frac{1}{6}$, mert 5-ből indulva $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az első lépésben a C_1 osztályba lépünk és ott is ragadunk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont a C_2-be, és innen kezdve az a.) pont szerinti $\frac{1}{3}$ az esélyünk hosszú idő alatt 7-be érkezni.

7.7 Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

c.) A napok hányad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

Megoldás:

a.) Jelöljük az állapotokat számokkal, mondjuk 1: vörös; 2: narancs; 3: barna. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

b.) Jelöljük a Markov láncot X_n-nel. Ha mondjuk május 1-e a nulladik nap, akkor május 5-e a negyedik, vagyis a kérdés $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) =$? Ez a P^4 mátrix $(1,1)$ eleme: $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P^4_{11}$. Ezt kiszámolhatjuk mondjuk úgy, hogy $P^4 = (P^2)^2$, Ebből persze nem kell minden elemet kiszámolni - ami nem kell, $*$-gal jelölöm:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{144} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ebből $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P^4_{11} = \frac{7}{144} \approx 0.048611$.

c.) Az ergodtételt fogjuk használni, ehhez szükség van a Markov lánc stacionárius eloszlására. (Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy stacionárius eloszlása van.) Meg kell oldanunk a $(P^T - I)\pi^T$ homogén lineáris egyenletrendszert. A szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{6} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ennek egy lehetséges megoldása pl. $\tilde{\pi} = (6\,11\,12)$, egyetlen normált megoldása pedig

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{29} & \frac{11}{29} & \frac{12}{29} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.20690 & 0.37931 & 0.41379 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtételt az egyes állapotok indikátoraira alkalmazva azt kapjuk, hogy az i állapotban hosszú távon az idő π_i hányadát tölti. Vagyis Juliska körme az idő $\pi_1 \approx 20.7\%$-ában vörös, $\pi_2 \approx 37.9\%$-ában naracs és $\pi_3 \approx 41.4\%$-ában barna.

7.8 Mari néni szeret beszélgetni, és befolyásolható. Minden este elmegy egy szomszédjához beszélgetni, és átveszi annak pártállását. Hat szomszédja van, ebből 2 fűpárti, 1 fapárti, 3 pedig virágpárti. Mari néni minden este vaktában választ beszélgetőpartnert azon 5 közül, akinél előző este *nem járt*. Jelöljük Mari néni lehetséges pártállásait $\{1, 2, 3\}$-mal, ahol „1" jelentése „fűpárti", „2" jelentése „fapárti", „3" jelentése „virágpárti". X_n pedig jelölje Mari néni pártállását n nap elteltével.

Modellezzük Mari néni állapotait időben homogén Markov láccal.

a.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége az 123123 állapotsorozatnak (a nulladik napot is beleértve)?

c.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége, hogy a 2-dik napon is az?

d.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz Mari néni éppen fapárti?

e.) Mari néni minden nap elmegy a gazdaboltba, és ha éppen fűpárti, akkor fűnyíródamilt vesz 500 Ft-ért, ha éppen fapárti, akkor permetszert 3000 Ft-ért, ha pedig virágpárti, akkor tápoldatot 1000 Ft-ért. Napi átlagban mennyit költ a gazdaboltban hosszú távon?

Megoldás:

a.) Egy példa: ha ma éppen fűpárti, akkor a lehetséges 5 beszélgetőpartnere közül 1 fűpárti, 1 fapárti és 3 virágpárti. Ezért $P_{11} = \frac{1}{5}$, $P_{12} = \frac{1}{5}$, $P_{13} = \frac{3}{5}$. Hasonlóan végiggondolva

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 3/5 \\ 2/5 & 0/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

b.) $\mathbb{P}((X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (2, 3, 1, 2, 3) \mid X_0 = 1) = P_{12}P_{23}P_{31}P_{12}P_{23} = \frac{1}{5}\frac{3}{5}\frac{2}{5}\frac{1}{5}\frac{3}{5} = \frac{18}{3125} = 0.00576$.

c.) $\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_0 = 1) = (P^2)_{11} = \frac{9}{25} = 0.36$.

d.) Megkeressük a stacionárius eloszlászt, vagyis megoldjuk a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -5/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 3/5 & -3/5 & 0 \end{array}\right)$$

Ennek megoldása (pontosabban: végtelen sok megoldása közül az az egy, ami eleget tesz a $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ normálási feltételnek is): $\pi = \begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2/6 & 1/6 & 3/6\end{pmatrix}$. Ez nem meglepő módon éppen a megfelelő pártállású szomszédok aránya.

Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, a Markov láncok alaptétele szerint $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i$, vagyis ha n nagy, akkor $\mathbb{P}(X_n = 2) \approx \pi_2 = \frac{1}{6}$.

e.) Mari néni költségfüggvénye

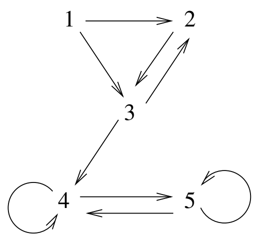
$$f = \begin{pmatrix} 500 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint ennek időátlaga 1 valószínűséggel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i\in S}\pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix}\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}500\\3000\\1000\end{pmatrix} = \frac{7000}{6} \approx 1167,$$

vagyis Mari néni hosszú távon napi átlagban 1167 Ft-ot hagy a gazdaboltban.

7.9 Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy



- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞, vagy nincs
$\{2;3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4;5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

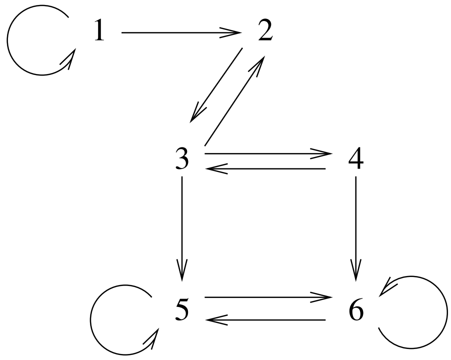
Érdemes megjegyezni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunikál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \leftrightsquigarrow j$ reláció („i kommunikál j-vel") egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞, vagy nem definiált.

7.10 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

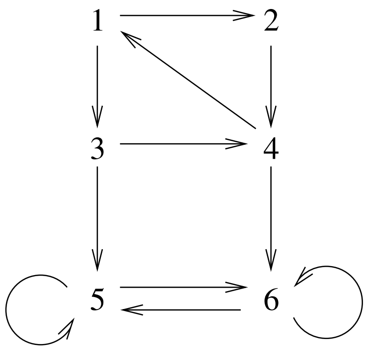
- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás:

- Az {1} osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert 1 lépésben vissza lehet térni.
- A {2,3,4} osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 2, mert visszatérni csak páros sok lépésben lehet.
- Az {5,6} osztály zárt, mert el nem lehet elhagyni, tehát (véges méretű osztályról lévén szó) lényeges és visszatérő. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert akárhány lépésben vissza lehet térni.



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)



2. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

7.11 A 2. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás:

- $\{1, 2, 3, 4\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 3.
- $\{5, 6\}$ zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1 (vagyis aperiodikus).

7.12 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

- Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor őt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
- Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n-edik perc végén (pontosabban: az $n+1$-edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemes észnél lenni: mik is a* ***lehetséges, elérhető*** *állapotok?)*

b.) Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!

e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2\ldots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?

f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ valószínűség?

g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !

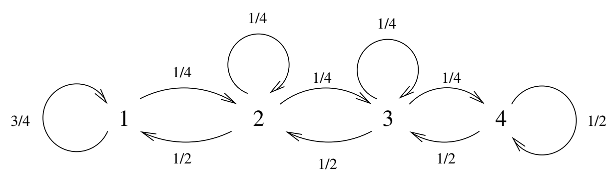
h.) Mennyi $n = 29$-re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek!* ***Bónusz:*** *Számoljuk ki a* $\mathbb{P}(X_n = 3)$ *valószínűséget* $n = 10, 20, 30$*-ra valamilyen számítógépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*

Megoldás:

a.) Mivel a vevőket mindig közvetlenül azután számoljuk, hogy a soron következő megérkezett, X_n mindig legalább 1 lesz. Másfelől, ha már a 4-et elérte, akkor tovább nem nőhet, vagyis 5-nél mindig kisebb marad. Így az állapottér

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

b.) Mivel mindig 1 vevő érkezik, a Markov lánc mindig eggyel kevesebbet ugrik lefelé, mint ahány vevőt sikerült kiszolgálni. Vagyis $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-et ugrik lefelé, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nem ugrik sehová, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et felfelé. Kivétel ez alól a két végső helyzet: 1-ből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ugrik 1-et felfelé és $\frac{3}{4}$ valószínűséggel marad; 4-ből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugrik 1-et lefelé és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel marad. Így a gráf-reprezentáció



c.)

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

d.) A feladat szövege szerint $X_0 = 1$, vagyis $\pi_1(0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, a többi i-re $\pi_i(0) = 0$. Vagyis a kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ez *sorvektor.*

e.) $\mathbb{P}((X_0X_1\ldots X_6) = (1211223)) = \pi_1(0)P_{12}P_{21}P_{11}P_{12}P_{22}P_{23} = 1 \cdot \frac{1}{4}\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{2048}$.

f.) Mivel $X_0 = 1$, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_3 = 2 | X_0 = 1)$. Ezt kétféleképpen is ki lehet számolni:

i.) 1-ből 2-be 3 lépésben el lehet jutni az 1112, 1122, 1212, 1222, 1232 útvonalakon. Ezek val.ségeit az előző pont mintájára kiszámoljuk és összeadjuk. Nem csinálom meg.

ii.) $\mathbb{P}(X_3 = 2|X_0 = 1) = P^3_{12}$, vagyis a P^3 3-lépéses átmenetmátrix első sorának második eleme. A mátrix-szorzást elvégezve

$$\begin{aligned}
P^3 &= \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{2} & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \frac{17}{64} & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ahol a $*$-gal jelölt elemek számunkra nem érdekesek, így ki se számoltam őket. Lényeg, hogy $P^3_{12} = \frac{17}{64} = 0.265625$

g.)

$$\begin{aligned}
\pi(2) &= \pi(0)P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

h.) $\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29)$, vagyis a $\pi(29)$ vektor harmadik eleme. Ezt elegánsan úgy lehet leírni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29) = \pi(29) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\pi(29) = \pi(0)P^{29} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{29}$,

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{29} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

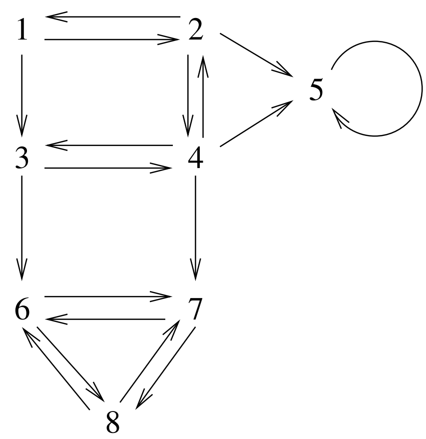
Bónusz:

$$a_n := \mathbb{P}(X_n = 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

„GNU Octave"-val számolva:

n	10	20	30
a_n	0.12629	0.13294	0.13331

Megjegyzem, hogy $n \to \infty$-re a határérték $\pi_3(\infty) = \frac{2}{15} \approx 0.1333333$.



3. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

7.13 A 3. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás: Két állapot pontosan akkor van azonos osztályban, ha egyikből a másikba és másikból az egyikbe is el lehet jutni (esetleg több lépésben). Egy osztály akkor zárt, ha nem lehet belőle kijutni – egyébként nyílt. Mivel az állapottér véges, minden osztály is véges, ezért minden osztály pontosan akkor lényeges és pontosan akkor visszatérő, ha zárt, egyébként pedig lényegtelen és átmeneti. (Végtelen állapotterek végtelen osztályaira ezek a fogalmak sokkal izgalmasabbak.)

Egy állapot periódusa az a legnagyobb szám, aminek minden lehetséges visszatérési idő többszöröse. Egy osztály periódusa az ő elemeinek közös periódusa.

Mindezek alapján

- Az {1,2,3,4} osztály nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 2.
- Az {5} osztály zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus).
- A {6,7,8} osztály zárt, lényeges, visszatérő. Periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus), hiszen 2 és 3 lépésben is vissza lehet térni ugyanabba az állapotba.

7.14 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottéren, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

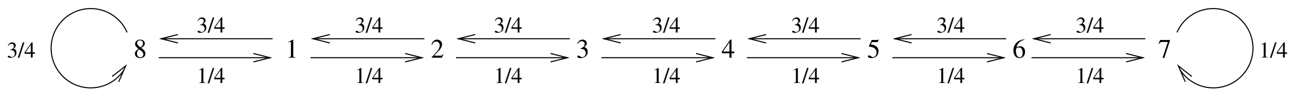
a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?

c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

Megoldás: A folyamat gráf-reprezentációja a 4 ábrán látható. Ez valóban születési-halálozási



4. ábra. Születési-halálozási folyamat gráf-reprezentációja

folyamat, mert ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet.

a.) Születési-halálozási folyamatban a szomszédos állapotok stacionárius eloszlás szerinti súlya úgy aránylik egymáshoz, mint a közöttük való két átmenethez tartozó átmenetvalószínűségek hányadosa – egészen pontosan olyan sorrendben, hogy

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}.$$

Ez alapján a példabeli folyamatra

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_4}{\pi_5} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_5}{\pi_6} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_6}{\pi_7} = \frac{3}{1}.$$

Vagyis a stacionárius eloszlás konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = (3^7, 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1)$$

vektornak. Ahhoz, hogy az elemek összege 1 legyen, a normálási konstanst

$$c = \frac{1}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^7} = \frac{1}{\frac{3^8-1}{3-1}} = \frac{1}{3280}$$

-nak kell választani, vagyis $\pi_k = \frac{3^{7-k}}{3280}$ $(k = 0, 1, \dots, 7)$, avagy

$$\pi = \left(\frac{3^7}{3280}, \frac{3^6}{3280}, \frac{3^5}{3280}, \frac{3^4}{3280}, \frac{3^3}{3280}, \frac{3^2}{3280}, \frac{3}{3280}, \frac{1}{3280}\right).$$

Vegyük észre, hogy ehhez örvendetes módon fel se kellett írni a 8×8-as átmenetmátrixot.

b.) A Markov lánc irreducibilis, mert minden állapotból minden állapotba el lehet jutni. A 0 állapot nyilvánvalóan aperiodikus, mert 1 lépésben vissza lehet térni. Így az összes többi állapot – és az egész Markov lánc – is aperiodikus. Irreducibilis, aperiodikus és véges állapoterű Markov láncban a Markov láncok alaptétele szerint az eloszlás hosszú idő után közel van az egyetlen stacionárius eloszláshoz. 1000 lépés hosszú idő, így a kiinduló állapottól függetlenül $\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{3^7}{3280} = \frac{2187}{3280} \approx 0.66677$.

c.) Vezessük be az állapottéren az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(k) := k$ definícióval. Ez az f a sorhosszt méri, és oszlopvektorként tekintünk rá:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga 1 valószínűséggel tart f-nek π szerinti várható értékéhez (súlyozott átlagához), vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k\in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \cdots + \pi_7 \cdot 7 = \\ &= \sum_{k=0}^{7} \frac{3^{7-k}}{3280} \cdot k = \frac{1636}{3280} \approx 0.4988. \end{aligned}$$

d.) **Bónusz:** A születési-halálozási folyamatra végtelen állapottér esetén is igaz, hogy $\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}$, vagyis esetünkben

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \cdots = \frac{3}{1}, \tag{4}$$

már ha létezik stacionárius eloszlás. Az pedig pontosan akkor létezik, ha a (4) alapján definiált $\tilde{\pi}$ normálható. Más szóval, a stacionárius eloszlás most is konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots\right)$$

vektornak, már ha van olyan konstans, amivel ezt megszorozva az elemek összege 1 lesz – vagyis ha az elemek összege véges. Esetünkben szerencsére

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty,$$

így

$$\pi = \frac{1}{\frac{3}{2}} \tilde{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^4}, \dots\right)$$

lesz az egyetlen stacionárius eloszlás. Más szóval

$$\pi_k = \frac{2}{3^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

A Markov láncok alaptételében állított eloszlás-konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és aperiodikus és HA van stacionárius elszlása. Esetünkben ezek teljesülnek, így

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{2}{3}.$$

Hasonlóan, az ergodtételben állított konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és HA van stacionárius elszlása és HA az f-nek létezik a π szerinti várható értéke. Esetünkben ezek teljesülnek, így az $f: S \to \mathbb{R}$, $f(k) := k$ függvényre

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k\in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Az utolsó végtelen sort sokféleképpen ki lehet számolni, pl. úgy is, hogy észrevesszük, hogy a π eloszlás szerint a sorhossz pesszimista geometriai eloszlású $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, aminek a várható értéke $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k k = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{2}$.

Látható, hogy a végtelen állapottéren számolt határértékeket elég jól közelítik a véges (mindössze 8 elemű) állapottéren számoltak. Ennek az az oka, hogy a stacionárius eloszlás a mi modellünkben gyorsan lecseng, és a $k > 7$ állapotoknak együttesen is kicsi (egész pontosan $\frac{1}{3^8} \approx 0.00015$) a súlya.

7.15 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgálnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgálni.

Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n-edik csettintés után (vagyis az n-edik sorhossz-változás után).

a.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?

b.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?

c.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!

d.) Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

f.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? *(Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.)*

g.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

Megoldás: Kezdjük a c.) és d.) kérdéssel, utána jön az a.) és b.).

c.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a gráf-reprezentáció

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "1"] & 1 \arrow[l, shift left, "3/4"] \arrow[r, shift left, "1/4"] & 2 \arrow[l, shift left, "3/4"] \arrow[r, shift left, "1/4"] & 3 \arrow[l, shift left, "3/4"] \arrow[r, shift left, "1/4"] & 4 \arrow[l, shift left, "1"] \end{tikzcd}$$

d.) Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a.) A 0 állapotból a 0-ba 4 lépésben visszatérni csak kétféleképpen lehet: $0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 0$ vagy $0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 0$. Ezek (feltételes) valószínűsége (feltéve, hogy 0-ból indulunk $P_{01} \cdot P_{10} \cdot P_{01} \cdot P_{10} = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ illetve $P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{10} = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$, így

$$\mathbb{P}(X_4 = 0 | X_0 = 0) = \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = \frac{45}{64} \approx 0.703.$$

b.) A 0 állapotból a 0-ba 5 lépésben visszatérni sehogy sem lehet, azért

$$\mathbb{P}(X_5 = 0 | X_0 = 0) = 0.$$

e.) **1. megoldás, ész nélkül:** A $(P^T - I)\pi^T$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol I az egységmátrix, $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}$ a keresett stacionárius eloszlás (sorvektor):

$$\begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer a szokásos bővített mátrix jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Eliminációval nagyon könnyen kijön, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right).$$

Az utolsó egyenlet kiesett, ahogy kell. Az jött ki, hogy

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= 3\pi_2 \\ \pi_2 &= 3\pi_3 \\ \pi_3 &= 4\pi_4. \end{aligned} \tag{5}$$

$\tilde{\pi}_4 := 1$ választással kijön egy megoldás: $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Az összes többi megoldás ennek konstans-szorosa, tehát az egyetlen stacionárius eloszlás ennek lenormáltja (hogy a sorösszeg 1 legyen):

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{27}{80} & \frac{36}{80} & \frac{12}{80} & \frac{4}{80} & \frac{1}{80} \end{pmatrix}.$$

Azt, hogy pontosan egy stacionárius eloszlás van, persze előre tudtuk abből, hogy a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis.

2. megoldás, kevesebb munkával: Mivel X_n születési-halálozási folyamat, minden $i = 0, 1, 2, 3$-ra igaz, hogy $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$. Ez éppen az (5) egyenletrendszer. Innen az előző megoldás érvényes.

f.) A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis. Ha aperiodikus is *lenne*, akkor a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_{100} = 0) \approx \pi_0 = \frac{27}{80} = 0.3375$ *lenne*, a kezdeti állapottól függetlenül. Igen ám, de ez a Markov lánc *periodikus*, éspedig a periódusa 2. Mivel a feltevés szerint $X_0 = 0$, $n = 100$ lépésben pont lehetséges eljutni a 0-ba – a keresett val.ség nem nulla.

Intuitív érvelés 1: 0-ból indulva a 0-ban csak minden páros lépésben járhatunk. Mégis, az ergodtétel szerint hosszú távon az időnek $\pi_0 = 33.75\%$-át töltjük ott. Ezért a *páros* időpontok $2 \cdot 33.75\% = 67.5\%$-át töltjük 0-ban, ezért

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx 2\pi_0 = 0.675 = 67.5\%.$$

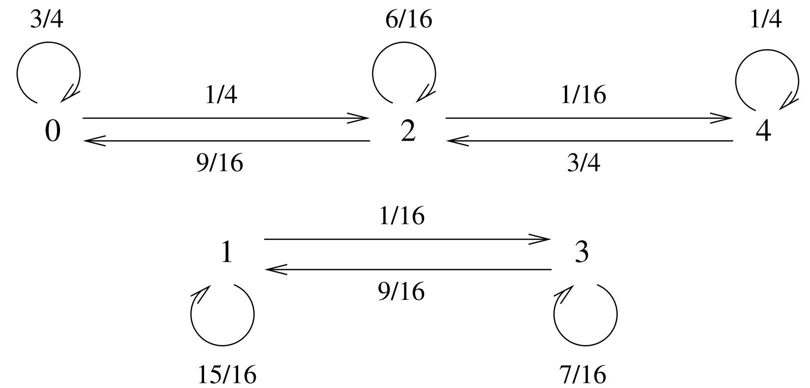
Intuitív érvelés 2: 0-ból indulva a $n = 100$ ugrás után csak a páros állapotokban lehetünk. Ezeken belül viszont – mivel $n = 100$ sok idő – jó közelítéssel a stacionárius eloszlás adja meg a tartózkodási valószínűségeket: persze **abban az értelemben**, hogy páros i-re az i-ben való tartózkodás valószínűsége π_i-vel arányos. Vagyis mivel a páros i-khez tartozó π_i-k összege nem 1, újra kell őket normálni 1-re. Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx \frac{\pi_0}{\pi_0 + \pi_2 + \pi_4} = \frac{\frac{27}{80}}{\frac{27}{80} + \frac{12}{80} + \frac{1}{80}} = \frac{27}{40} = 0.675 = 67.5\%.$$

Precíz érvelés: A kétlépéses átmenetmátrix

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 15/16 & 0 & 1/16 & 0 \\ 9/16 & 0 & 6/16 & 0 & 1/16 \\ 0 & 9/16 & 0 & 7/16 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Nézzünk a Markov láncra csak minden páros időpontban. Így az $Y_k := X_{2k}$ Markov lánc átmenetmátrixa a fenti P^2, gráf-reprezentációja



Látható, hogy az Y_k Markov lánc *reducibilis*, kommunikáló osztályai a $\{0,2,4\}$ és az $\{1,3\}$, mindkettő zárt. Ezért az $\tilde{S} := \{0,2,4\}$ rész-állapottér önálló életet él, és az Y_k Markov láncot nézhetjük csak ezen. Így az álapottér már irreducibilis, az átmenetmátrix pedig a fenti P^2 páros indexű elemeiből áll:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Vagyis kaptunk egy véges állapotterű, irreducibilis és immár *aperiodikus* Markov láncot. Ennek a szokásos módon kiszámohatjuk a stacionárius eloszlását, és az jön ki, hogy

$$\bar{\pi} = \begin{pmatrix} \bar{\pi}_0 & \bar{\pi}_2 & \bar{\pi}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27}{40} & \frac{12}{40} & \frac{1}{40} \end{pmatrix}.$$

Így a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_{50} = 0 | Y_0 = 0) \approx \bar{\pi}_0 = \frac{27}{40} = 0.675.$$

g.) Ha a sorhosszra nincs korlát, a (5) egyenletrendszer megfelelőjére azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= 3\pi_2 \\ \pi_2 &= 3\pi_3 \\ \pi_3 &= 3\pi_4 \\ \pi_4 &= 3\pi_5 \\ &\vdots \\ \pi_i &= 3\pi_{i+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ebből $\pi_0 := c$ választással kapható egy megoldás:

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} c & \frac{4}{3}c & \frac{4}{9}c & \frac{4}{27}c & \frac{4}{81}c & \dots & \frac{4}{3^i}c & \dots \end{pmatrix}$$

ezek összege $c(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{3^i}) = c(1 + \frac{4/3}{1-1/3}) = 3c$, vagyis pontosan akkor 1, ha $c = \frac{1}{3}$. Vagyis $c := \frac{1}{3}$ választással kapunk egy stacionárius eloszlást:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{4}{27} & \frac{4}{81} & \dots & \frac{4}{3^{i+1}} & \dots \end{pmatrix}.$$

Avagy:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{4}{3^{i+1}}, & \text{ha } i \geq 1 \end{cases}.$$

Ellenőrizhető, hogy ez tényleg stacionárius eloszlás.

Irreducibilis Markov láncra, ha a stacionárius eloszlás létezik (vagyis a lánc pozitív rekurrens), akkor végtelen állapotterű esetben is érvényes a Markov láncok konvergenciatétele, mint a véges állapottér esetén (csak a konvergencia lassabb). Így az f.) pont-beli érvelésből az jön ki, hogy

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx 2\pi_0 = \frac{2}{3}.$$

8. Folytonos idejű Markov láncok

8.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?

d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?

e.) Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

Megoldás:

a.) Az időt mérjük percben. Az állapottér $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotba lehet, éspedig felfelé 1 rátával (mert a teherautók 1 rátával jönnek, lefelé pedig 3 rátával, mert a személyautók 3 rátával jönnek. Persze az 1-ből csak felfelé, az 5-ből csak lefelé lehet ugrani. Így a generátor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b.) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_1 : \pi_2 = 3 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$, $\pi_3 : \pi_4 = 3 : 1$, $\pi_4 : \pi_5 = 3 : 1$. Összesítve $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4 : \pi_5 = 81 : 27 : 9 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{81}{121} & \frac{27}{121} & \frac{9}{121} & \frac{3}{121} & \frac{1}{121} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $A^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

c.) Egy óra hosszú idő, ezért a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_{60} = 1 \,|\, X_0 = 5) \approx \pi_1 = \frac{81}{121} \approx 69\%$.

d.) Az ergodtétel értelmében az időátlag $\pi_5 = \frac{1}{121} \approx 0.8\%$.

e.) A jókedv egy szám 1 és 5 között, egész pontosan t-kor a jókedv X_t. Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i\in S} i \cdot \pi_i = 1 \cdot \frac{81}{121} + 2 \cdot \frac{27}{121} + 3 \cdot \frac{9}{121} + 4 \cdot \frac{3}{121} + 5 \cdot \frac{1}{121} = \frac{179}{121} \approx 1.48.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

8.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk észnél a rátákkal!*

b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

Megoldás: Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ha 0 csatár egészséges, persze nincs sérülés. Ha 1 egészséges (vagyis $X_t = 1$), akkor az az egy $\frac{1}{3}$ rátával sérül meg, vagyis $\lambda_{10} = \frac{1}{3}$. Ha 2 csatár egészséges, akkor mindkettő játszik is, így *valamelyikük* már $\lambda_2 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ rátával sérül meg. Ha 3 vagy 4 csatár egészséges, akkor is csak kettő játszik, így a sérülés rátája ugyanennyi: $\lambda_{32} = \lambda_{43} = \frac{2}{3}$.

Ha minden csatár egészséges, akkor persze egy se tud meggyógyulni. A pontosan 1 sérült (vagyis $X_t = 3$), akkor azaz egy 1 rátával épül fel, vagyis $\lambda_3 4 = 1$. Ha 2 sérült, akkor mindkettő lábadozik, így *valamelyikük* már $\lambda_2 3 = 2 \cdot 1 = 2$ rátával épül fel. Ugyanígy, ha 3 sérült, akkor mindhárom lábadozik, ezért $\lambda_1 2 = 3$, és ha mind a 4 sérült, akkor mind a négy lábadozik, így $\lambda_0 1 = 4$.

Mivel egy valószínűséggel egyszerre csak egy csatár tud megsérülni vagy felépülni (a folytonos Markov modell szerint), az összes többi (nem szomszédos állapotok közötti) ugrási ráta 0.

a.) Így az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -10/3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -8/3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(A főátlón kívülre az ugrási rátákat írjuk, a főátlóba meg annyit, hogy minden sorösszeg nulla legyen.)

b.) A $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_4)$ stacionárius eloszlás kiszámításához vagy megoldjuk a $G^T\pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert azzal a kiegészítő feltétellel, hogy $\pi_0 + \cdots + \pi_4 = 1$, vagy kihasználjuk, hogy X_t születési-halálozási folyamat, amiből *szomszédos* i, j állapotokra $\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{\lambda_{ji}}{\lambda_{ij}}$. Mindkettőből az jön ki, hogy

$$\begin{aligned} \pi &= c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 54 & 162 & 243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{472} & \frac{12}{472} & \frac{54}{472} & \frac{162}{472} & \frac{243}{472} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.002 & 0.025 & 0.114 & 0.343 & 0.515 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c.) A 0 állapotban eltöltött időnek a teljes időhöz mért aránya nem egyéb, mint $f(X_t)$ időátlaga, ahol $f : S \to \mathbb{R}$ a 0 állapot indikátora: oszlopvektor formájában $f = (1\,0\,0\,0\,0)^T$. Mivel a Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint ez az időátlag tart $\pi f = \pi_0 \approx 0.002$, vagyis a Faláb FC hosszú távon az idő kb. 2 ezrelékében játszik csatár nélkül.

d.) A játszó csatárok számát az állapot függvényében a $g = (0\,1\,2\,2\,2)^T$ függvény adja meg. Ennek időátlaga hosszú távon - ismét az ergodtétel miatt $\pi g = \pi_1 + 2 \cdot (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4) \approx 1.97$.

e.) A 4 állapotból való elugrás rátája $\frac{2}{3}$, így annak valószínűsége, hogy $t = \frac{1}{3}$ ideig nem történik ugrás, pontosan annak valószínűsége, hogy egy $\lambda = \frac{2}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlás $t = \frac{1}{3}$-nál nagyobb értéket vesz fel, vagyis $1 - F_{\lambda=\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}) = e^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{9}} \approx 0.80$.

8.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár", illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel".

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

Megoldás: Az állapotokat jelöljük számokkal: legyen $S = \{0, 1\}$ ahol 0 a passzív, 1 pedig az aktív állapot. Jelöljük a rendszer állapotát t idő elteltével X_t-vel. Mivel csak két állapot van, ugrani persze 0-ból csak 1-be, 1-ből pedig csak 0-ba lehet.

a.) Az 1-ből 0-ba ugrás rátája $\lambda_{10} = 60$, mert a feldolgozással eltöltött idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{60}$. A 0-ból 1-be ugrás rátája $\lambda_{01} = 2$, mert ilyen rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek a jelek. Ezek a λ_{ij}-k lesznek a G infinitezimális generátor főátlón kívüli elemei. A főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Így

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 60 & -60 \end{pmatrix}.$$

b.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az egyes állapotok valószínűségei tartanak a (z egyetlen) stacionárius eloszlás szerinti súlyokhoz. 10 óra azaz 600 perc pedig (ilyen ráták mellett) hosszú idő. Ezért keressük a $\pi = (\pi_0\ \pi_1)$ stacionárius eloszlást a $G^T\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{pmatrix} -2 & 60 \\ 2 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avagy a lineáris algebrában szokásos tömör jelöléssel

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 60 & 0 \\ 2 & -60 & 0 \end{array}\right).$$

A két egyenlet egymásnak -1-szerese, így elég mondjuk az elsőt nézni: $-2\pi_0 + 60\pi_1 = 0$, amiből $\pi_0 = 30\pi_1$. Például $\pi_1 = 1$ választással is megkapjuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását: $\tilde{\pi} = (30\ 1)$. A keresett stacionárius eloszlás ennek olyan konstansszorosa, amiben az elemek összege 1:

$$\pi = \left(\tfrac{30}{31} \quad \tfrac{1}{31}\right).$$

A Markov láncok alaptétele szerint tehát $\mathbb{P}(X_{600} = 1) \approx \pi_1 = \frac{1}{31} \approx 0.0323$.

c.) A pillanatnyi teljesítményfelvétel a t időpontban $f(X_t)$, ahol az $f : S \to \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség olyan, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 10$. Ezt célszerű oszlopvektorként írni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében $f(X_t)$ időátlaga hosszú távon (1 valószínűséggel) tart az egyetlen π stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i\in S} \pi_i f(i) = \pi f = \left(\tfrac{30}{31} \quad \tfrac{1}{31}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{30}{31}\cdot 1 + \frac{1}{31}\cdot 10 = \frac{40}{31} \approx 1.29.$$

8.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy három állapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov lánc Q átmenet-valószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

Megoldás:

a.) Az egyes állapotokban a tartózkodási idők a feladat szövege szerint exponenciálisak, ahogy annak egy folytonos idejű Markov láncban lenni kell. Ezek paraméterei (rátái) éppen a tartózkodási idő paraméter vektort adják: $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (8, 1, 5)$. Ezek a ráták kerülnek negatív előjellel a G infinitezimális generátor főátlójába. A főátlón kívüli elemekre $G_{ij} = \lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. Ezeket mind beírva

$$G = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0.2 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

b.) Meg kell oldani a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. A lineáris algebrában szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{2. sor+=1. sor}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

Az utolsó egyenlet elhagyható, mert azonos a másodikkal. Az elsőhöz hozzáadjuk a másodikat 4-szer, majd mindkét sort leosztjuk a főátlóbeli elem abszolút értékével:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 25 & 0 \end{array}\right).$$

Vagyis $\pi_1 = 3\pi_3$ és $\pi_2 = 25\pi_3$, amiből az egyenletrendszer egy lehetséges megoldása $\bar{\pi} = (3, 25, 1)$. Ezt lenormálva (hogy az elemek összege 1 legyen)

$$\pi = \left(\frac{3}{29}, \frac{25}{29}, \frac{1}{29}\right).$$

c.) Legyen $S = \{1, 2, 3\}$ az állapottér. Az, hogy az 1-es állapotban eltöltött idő az összes időnek hányad része, az $f : S \to \mathbb{R}$,

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

megfigyelhető mennyiség időátlaga. Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint az időátlag hosszú távon (1 valószínűséggel) megegyezik a stacionárius eloszlás szerinti átlaggal, vagyis $\pi \cdot f = \pi_1 = \frac{3}{29}$. Hasonlóan hosszú távon a 2-es állapotban az idő $\pi_2 = \frac{25}{29}$, a 3-asban pedig $\pi_2 = \frac{1}{29}$ hányadát tölti.

d.) Ezúttal először a $g : S \to \mathbb{R}$,

$$g = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

függvény időátlagát keressük. Megint csak az ergodtétel értelmében az időátlag hosszú távon egy valószínűséggel $\pi \cdot g = 100\pi_1 + 5\pi_2 + 20\pi_3 = \frac{445}{29}$ (hajszál/óra). Négy hét az $4 \cdot 7 \cdot 24 = 672$ óra, vagyis Mari ezalatt körülbelül $672 \cdot \frac{445}{29} \approx 10312$ hajszálat veszít.

8.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

b.) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

c.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

d.) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

e.) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:
X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

a.) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

b.) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

c.) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

d.) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

e.) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.

8.6 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben*.

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A közbülső állapotokból (1, 2, 3) az elugrás rátája 6, mivel a várható tartózkodási idő $\frac{1}{6}$ perc. Legalul, a 0 állapotban viszont csak ennek $\frac{1}{3}$-a, mert nem elég, hogy csörög az óra, hanem még 5-öst vagy 6-ost is kell dobni, aminek a valószínűsége $\frac{1}{3}$. Ugyanígy legfelül, a 4 állapotban az elugrási ráta $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (0\,1\,0\,0\,0)$.

b.) 0-ból csak 1-be lehet ugrani, 4-ből csak 3-ba. A többi állapotból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrunk fel és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel le. Így a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) A $\underline{\underline{\lambda}}$ ráta-mátrix főátlójában nincs semmi, a tobbi eleme $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. A G infinitezimális generátor ugyanez, csak a főátlója úgy van kitöltve, hogy minden sorösszeg 0 legyen, vagyis

$$G_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ha } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Esetünkben

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hát persze: a lefelé ugrás rátája mindig 4, mert egy óracsörgés és egy 1 és 4 közötti dobás kell hozzá (kivéve legalul); a felfelé ugrás rátája pedig mindig 2, mert egy óracsörgés és egy 5-ös vagy 6-os dobás kell hozzá (kivéve legfelül).

d.) A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{4}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4$$

e.) $t = \frac{1}{60}$ rövid idő, ezért a t idejű átmenetmátrix $P(t) \approx P(0) + tP'(0) = I + tG$. Ezen belül $P_{12}(t) \approx 0 + t\lambda_{12} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$. Vagyis

$$\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{60}\right) = 2 \,\middle|\, X(0) = 1 \right) \approx \frac{1}{30}.$$

f.) Folytonos idejű születési-halálozási folyamatban minden i-re $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1}\lambda_{i+1,i}$. Ebből esetünkben $\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\pi_3}{\pi_4} = 2$; Ebből $\pi_4 = 1$ választással $\tilde{\pi} = (16; 8; 4; 2; 1)$. Ezt lenormálva kapjuk az (egyetlen) stacionárius eloszlást:

$$\pi = \pi^{(Y)} = \begin{pmatrix} \frac{16}{31} & \frac{8}{31} & \frac{4}{31} & \frac{2}{31} & \frac{1}{31} \end{pmatrix}.$$

g.) $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű. Ezért a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X(t) = 4 \,|\, X(0) = 1) \approx \pi_4 = \frac{1}{31}.$$

h.) A béka helye az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(i) = i$, vagyis vektor-formában $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f$$
$$= \frac{16 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{31} = \frac{26}{31} \approx 0.84$$

8.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük* ***valamelyik****?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Ha egy körte ég, annak kiégési rátája a várható élettartam reciproka, esetünkben $1/1 = 1$, vagyis az 1 állapotból a 0 állapotba $\lambda_{10} = 1$ rátával ugrik a rendszer. Ha 2 körte ég, akkor már $1 + 1 = 2$ rátával fog kiégni valamelyik, így $\lambda_{21} = 2$. Ugyanígy $\lambda_{32} = 3$. A gondnok látogatásainak rátája 2, így a 0, 1 és 2 állapotból is $\lambda_{03} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 2$ rátával ugrik a rendszer 3-ba. (Ha a rendszer éppen a 3 állapotban van és jön a gondnok, akkor nem történik semmi.) Más átmenet nem lehetséges, így a ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 2 \\ 1 & * & 0 & 2 \\ 0 & 2 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \end{pmatrix}.$$

(Ennek a főátlójában nincs semmi, mert helyben ugrás nincs.)

b.) Az infinitezimális generátort úgy kapjuk, hogy a $\underline{\underline{\lambda}}$ főátlóját kitöltjük úgy, hogy minden sorösszeg nulla legyen:

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

c.) Legyen tegnap délben a $t = 0$ időpont. Így a kérdés

$$\mathbb{P}(X(\Delta t) = 3 \,|\, X(0) = 2) = P_{23}(\Delta t) =?$$

ahol $\Delta(t) = \frac{2}{365}$, mert az időt években mérjük, és $P(t)$ a t idejű átmenetmártix. Mivel Δt kicsi (a rendszerbeli tipikus várakozási időkhöz képest), $P(\Delta t) \approx P(0) + \Delta t P'(0) = I + \Delta t G$, ahol I az egységmátrix. Vagyis

$$P_{23}(\Delta t) \approx I_{23} + \frac{2}{365} G_{23} = 0 + \frac{2}{365} \cdot 2 = \frac{4}{365} \approx 0.01 = 1\%.$$

(Más szóval: Két nap alatt a $2 \to 3$ átmenet valószínűsége első közelítésben megegyezik annak valószínűségével, hogy a két nap alatt jön a gondnok, mert már ennek is elég kicsi a valószínűsége – annak meg, hogy több esemény is történik, még sokkal kisebb. A gondnok látogatásának valószínűsége pedig rövid idő alatt ráta $\cdot$ idő.

d.) A kérdés most is

$$\mathbb{P}(X(t) = 3 \,|\, X(0) = 2) = P_{23}(t) = ?$$

de ezúttal $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis (valamint folytonos idejű, így periodikus nem lehet), ezért a Markov láncok alaptétele szerint a $\mathbb{P}(X(t) = 3)$ valószínűséget a stacionárius eloszlás szerinti π_3 valószínűséggel közelíthetjük (a kiinduló állapottól függetlenül), ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ennek kereséséhez a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3/4 & 0 \end{array}\right)$$

Ezt kiolvasva $\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1$, $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$, $\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_3$, vagyis pl. $\pi_3 = 4$ választással kapjuk, hogy egy megoldás a $\tilde{\pi} = (1, 2, 3, 4)$ vektor, és persze megoldás ennek minden számszorosa is. Minket az egyetlen normált megoldás érdekel (amire $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$), vagyis

$$\pi = \frac{1}{10}\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

Így a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}(X(20) = 3 \,|\, X(0) = 2) \approx \pi_3 = \frac{4}{10}.$$

e.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a „zavaróan sötét van” esemény indikátora, vagyis $f(0) = f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 0$. Vektor-jelöléssel

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így a $t \in [0, T]$ időtartam alatt a 0 és 1 állapotok valamelyikében eltöltött idő $\int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t$, a kérdés pedig, hogy az idő hány százalékát tölti a rendszer a 0 és 1 állapotok valamelyikében, az $f(X(t))$ időátlaga:

$$\overline{f(X)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t = ?$$

A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint egy valószínűséggel

$$\overline{f(X)} = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f,$$

ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Esetünkben

$$\overline{f(X)} = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}.$$

8.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

Megoldás:

a.) A sorban állók száma 0,1,2 vagy 3 lehet, így az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$.

b.) Egyszerre csak egy gyerek mehet el, és csak egy érkezhet, így ugrani minden állapotból csak szomszédos állapotokba lehet. A felfelé ugrás rátája mindig a gyerekek érkezési folyamatának rátája, vagyis 1 (mert percenként átlag 1 gyerek érkezik). A lefelé ugrás rátája pedig a kiszolgálás rátája, vagyis 2, mert a bácsi percenként átlag 2 gyereket szolgál ki. *FONTOS, hogy a ráta, ami 2, nem egyenlő a kiszolgálási idő várható értékével, ami $\frac{1}{2}$, hanem annak a reciproka.* Így a gráf-reprezentáció

$$0 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{2}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 3$$

c.) Ez alapján a ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 1 & 0 \\ 0 & 2 & * & 1 \\ 0 & 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

d.) A tartózkodási idő paraméter vektor a ráta-mátrix sorösszegeiből áll, vagy más szóval az egyes állapotokból való elugrás rátáiból:

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

e.) A 2 állapotból való elugrás rátája $\lambda_2 = 3$ vagyis a tartózkodási idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$.

f.) Az egyes irányokba való ugrások valószínűségeit a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa adja meg: $Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_1}$ ha $i \neq j$, és $Q_{ij} = 0$, ha $i = j$. Most a kérdés csak a 2-ből 3-ba ugrás val.ségére vonatkozott, vagyis a válasz $Q_{23} = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$. De ha már itt tartunk, felírom az egész mátrixot:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

g.) Az infinitezimális generátort úgy kapjuk a ráta-mátrixból, hogy a főátlóba beírjuk a tartózkodási idő paraméter vektor eleminek ellentettjét (vagyis annyit, hogy a sorösszegek nullák legyenek):

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

h.) Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy π stacionárius eloszlás (sorvektor) van, éspedig a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer egyetlen olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. Jelen esetben az egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right),$$

aminek a normált megoldása

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

(Az egyenletrendszer megoldásának és a megoldás lenormálásának menetét illetően lásd az előző feladat megoldását, vagy bármelyik lineáris algebra könyvet.)

i.) A Markov lánc folytonos idejű, irreducibilis és véges állapotterű, $t = 120$ perc pedig hosszú idő, ezért a Markov láncok alaptétele értelmében a kezdeti eloszlástól függetlenül

$$\mathbb{P}(X(120) = 3) \approx \pi_3 = \frac{1}{15}.$$

j.) Legyen

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

függvény az állapotéren. Ez éppen a 0 állapot indikátora, így $f(X(t))$ időátlaga éppen azt mondja meg, hogy a sor az idő mekkora hányadában üres. A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért az ergodtétel értelmében az $f(X(t))$ függvény (idő)átlaga hosszú távon 1 valószínűséggel a stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez tart:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i\in S}\pi_i f(i) = \pi f =$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{8}{15}.$$

8.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

Megoldás:

a.) Legyen a segítség szerint $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Ennek állapottere $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotokba lehet, vagyis $X(t)$ születési-halálozási folyamat. A felfelé ugrás, vagyis a gyerekek érkezésének rátája mindig 2, vagyis $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$. A lefelé ugrás, vagyis a kiszolgálás rátája mindig 1, vagyis $\lambda_{10} = \lambda_{21} = \lambda_{32} = \lambda_{43} = \lambda_{54} = 1$. A többi $\lambda_{ij} = 0$. A gráf-reprezentáció

$$0 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 5$$

A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása mindig olyan, hogy minden i-re (amire ez értelmes) $\pi_i\lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1}\lambda_{i+1,i}$. Esetünkben $i = 0, 1, 2, 3, 4$-re $2\pi_1 = 1\pi_{i+1}$, vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi = const\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{63} & \frac{2}{63} & \frac{4}{63} & \frac{8}{63} & \frac{16}{63} & \frac{32}{63}\end{pmatrix}.$$

A fagyis bácsi akkor unatkozik, ha $X(t) = 0$, vagyis az $f : S \to \mathbb{R}$, $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ (oszlopvektor) időátlagát keressük. Ez az ergodtétel szerint

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{63} \approx 0.016 = 1.6\%.$$

b.) Az állapottér ezúttal $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ végtelen, de $X(t)$ továbbra is születési-halálozási folyamat. A lefelé ugrás rátája továbbra is mindig 1, vagyis $\lambda_{i+1,i} = 1$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$. A felfelé ugrás rátája viszont csak akkor 2, ha legfeljebb 4 gyerek áll a sorban, vagyis $\lambda_{01} =$

$\lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$, Ha $i \geq 5$, akkor $\lambda_{i,i+1} = \frac{2}{3}$, mert csak minden harmadik érkező gyerek áll be a sorba. A gráf-reprezentáció ezúttal

$$0 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 1 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 2 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 3 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 4 \underset{1}{\overset{2}{\rightleftarrows}} 5 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 6 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 7 \underset{1}{\overset{2/3}{\rightleftarrows}} 8 \cdots$$

Így a $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$ szabály minden $i = 0, 1, 2, \ldots$-re érvényes. $i = 0, \ldots, 4$-re azt mondja, hogy $\pi_{i+1} = 2\pi_i$, viszont $i \geq 5$-re azt, hogy $\pi_{i+1} = \frac{2}{3}\pi_i$. Vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás, ha létezik,

$$\pi = c\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & \frac{64}{3} & \frac{128}{9} & \ldots & \frac{2^i}{3^{i-5}} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Esetünkben létezik, mert a vektorban szereplő számok összege véges:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &:= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \frac{64}{3} + \frac{128}{9} + \cdots + \frac{2^i}{3^{i-5}} + \cdots = \\ &= 31 + 32\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) = 31 + \frac{32}{1 - \frac{2}{3}} = 127 < \infty. \end{aligned}$$

Az ergodtétel állítása ebben az esetben is érvényes az $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots)^T$ függvényre, vagyis a fagyis bácsi az idő

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{127} \approx 0.8\%$$

-ában unatkozik.

8.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, A felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás, és az 5 állapot, ahonnan nincs felfelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 1 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 2 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 3 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 4 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 5$$

b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

d.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével a tartózkodási valószínűségek az egyetlen stacionárius eloszlással közelíthetők. Ezért kiszámoljuk a stacionárius eloszlást, vagyis megoldjuk a $G^T \pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert, ahol a π sorvektor a stacionárius eloszlás (a transzponáltja pedig oszlopvektor). Pontosabban: ennek a lineáris egyenletrendszernek a végtelen sok megoldása közül azt az egyet keressük, amelyik valószínűségeloszlás (vagyis az elemek összege 1). Az egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right),$$

ennek normált megoldása pedig

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{32}{63} & \frac{16}{63} & \frac{8}{63} & \frac{4}{63} & \frac{2}{63} & \frac{1}{63} \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{8}{63} \approx 0.127$$

e.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében f időátlaga majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i \in S} \pi_i f_i = \pi f = \frac{32}{63}$-hoz. Tehát a rendszer hosszú távon az idő $\frac{32}{63}$-át tölti üresjáratban.

f.) Azt kell kitalálnunk, hogy a beérkező feladatok hanyad része érkezik pont olyankor, amikor a rendszer az 5 állapotban van. Mivel a feladatok érkezési rátája független a rendszer állapotától, ez pontosan annyi lesz, amekkora hányadát az időnek a rendszer az 5 állapotban tölti. Ez pedig az előző ponthoz hasonlóan $\pi_5 = \frac{1}{63}$, vagyis hosszú távon a beérkező feladatok $\frac{1}{63}$-ada vész el.

8.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, A felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 1 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 2 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 3 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} 4 \underset{2}{\overset{4}{\leftrightarrows}} \cdots$$

b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 & \dots \end{pmatrix},$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

d.) A π stacionárius eloszlás végtelen sorvektor, a születési-halálozási folyamat sajátossága miatt eleget kell tennie a $2\pi_k = 4\pi_{k+1}$ egyenletnek *minden* $k = 0, 1, 2 \dots$*-re*. Ebből kiolvasható, hogy *ha van stacionárius eloszlás*, akkor az csak olyan lehet, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\pi_k = \frac{\pi_0}{2^k}. \tag{6}$$

A kulcskérdés, ami megkülönbözteti a végtelen állapottér esetét a végestől, az, hogy vajon van-e olyan 1-*re felösszegződő* nemnegatív számsorozat, ami ennek eleget tesz, vagyis π_0 megválasztható-e úgy, hogy

$$\sum_{k \in S} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_0}{2^k} = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

legyen. Szerencsére esetünkben a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sor *véges*, konkrétan $= 2$, vagyis $\pi_0 = \frac{1}{2}$ választással a (6) egyenlet tényleg stacionárius eloszlást ad. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \cdots \end{pmatrix}.$$

(Vagyis $\pi = PessGeom\left(\frac{1}{2}\right)$ pesszimista geometriai eloszlás.) A végtelen állapotterű születési-halálozási folyamatok stabilitásáról szóló tétel szerint ez tényleg az egyetlen stacionárius eloszlás, a t időbeli eloszlások ehhez konvergálnak. Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \mid X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

e.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

A végtelen állapotterű születési-halálozási folyamatokra vonatkozó ergodtétel értelmében f időátlaga majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i \in S} \pi_i f_i = \pi f$-hez (ha az átlagolandó függvény olyan, hogy ez a várható érték létezik). Esetünkben hosszú távon az idő $\pi f = \pi_0 = \frac{1}{2}$ részében lesz a gép üresjáratban.

9. Maximum likelihood becslés

9.1 9-elemű mintát vettünk az X valószínűségi változóból, ami (optimista) geometriai eloszlású, számunkra ismeretlen p paraméterrel. Ezt kaptuk: $1, 8, 7, 11, 6, 5, 6, 7, 4, 3$. Adjunk maximum likelihood becslést p-re! A feladatot az is számolja rendesen végig, aki tudja, hogy mi fog kijönni.

Megoldás:
A feladatba hiba csúszott, mert a felsorolt minta nem 9, hanem 10-elemű :(. Úgyhogy 10-elemű mintával számolok. Legyen a szokásos jelöléssel $q = 1 - p$, a megfigyelt adatsor pedig $x_1, x_2, \dots x_n$, és $n = 10$. A likelyhood-függvény $L(p) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X - 2 = x_2, \dots X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n q^{x_i - 1} p$. Ennek a logaritmusa, a log-likelihood-függvény

$$l(p) = \sum_{i=1}^n \left[(x_i - 1)\log q + \log p\right] = \log(1-p)\left[\sum_{i=1}^n x_i - n\right] + n \log p.$$

Ennek, mint p függvényének keressük a maximumát, amihez megnézzük, hol nulla a deriváltja:

$$0 := l'(p) = \frac{-1}{1-p} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{p},$$

amit megoldva

$$p = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i},$$

ez lesz a maximum likelihood becslés. A konkrét példában

$$p = \frac{10}{1+8+7+11+6+5+6+7+4+3} = \frac{10}{58} = 0.17$$

Megjegyzés: Hát persze, p jelentése valószínűség, ennek a maximum likelihood becslése pedig a bekövetkezési gyakoriság, és esetünkben a „siker” 10-szer következett be 58 kísérletből.

9.2 Egy (esetleg) hamis dobókockán a 6-os valószínűsége valami ismeretlen $p \in (0;1)$, az összes többi szám valószínűsége pedig azonos, $\frac{1-p}{5}$. A kockával 10-szer dobva mintát vettünk az eloszlásból, és azt kaptuk, hogy $5;6;4;3;4;6;3;1;6;3$. Adjunk maximum likelihood becslést p értékére.

Megoldás: A diszkrét valószínűségeloszlás $p(x) = p$, ha $x = 6$ és $p(x) = \frac{1-p}{5}$, ha $x = 1, 2, 3, 4, 5$. Így ha $n = 10$ és a minta $x_1, \ldots, x_n$, akkor a likelihood-függvény

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i),$$

esetünkben

$$L(p) = \left(\frac{1-p}{5}\right)^7 \cdot p^3,$$

ennek logaritmusa

$$l(p) = 7\ln(1-p) - 7\ln 5 + 3\ln p.$$

A maximum likelihood becsléshez az $l'(p) = 0$ egyenletet megoldva

$$p_{ML} = \frac{3}{10}.$$

További deriválással (pl.) ellenőrizhető, hogy ez tényleg globális maximumhelye l-nek.

9.3 Mintát vettünk egy X normális eloszlású valószínűségi változóból, melynek várható értéke *ismert*: $m = 1000$, de szórása ismeretlen. Azt kaptuk, hogy 997, 1002, 998, 1003, 996, 1001, 998, 1004, 1005. Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására.

Megoldás: $n = 9$, $m = 1000$ ismert és a likelihood-függvény

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{m,\sigma}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}},$$

amiből a log-likelihood függvény

$$l(\sigma) = \ln L(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left[-\ln\sqrt{2\pi} - \ln\sigma - \frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2} \right] = c - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2.$$

Ennek maximumát keressük, ehhez megoldjuk a $l'(\sigma) = 0$ egyenletet:

$$0 = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2,$$

amiből

$$\sigma_{ML} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2},$$

éppen a (korrigálatlan) tapasztalati szórás. Esetünkben

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = (-3)^2 + 2^2 + (-2)^2 + 3^3 + (-4)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 4^2 + 5^2 = 88,$$

amiből

$$\sigma_{ML} = \sqrt{\frac{88}{9}} \approx 3.13\,.$$

10. Statisztikai próbák

10.1 Egy műszer hosszúságot mér μm-ben. A mérés hibájáról tudjuk, hogy normális eloszlású: $hiba \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, sőt a szórásnégyzet is ismert: $\sigma^2 = 2$. A gyártó pedig azt állítja, hogy $m = 0$. Ennek ellenőrzésére 6 próbamérést végeztünk pontosan ismert hosszúságokon, és a következő hibákat kaptuk (μm-ben): 0.5; 0.7; −0.9; −0.4; 0.01; 1.1. Döntsünk 99%-os konfidenciaszinten (vagyis $\varepsilon = 0.01$) arról a hipotézisről, hogy a gyártó igazat állít.

Megoldás:
Egymintás u-próbát végzünk kétoldali ellenhipotézissel. A nullhipotézis: $H0$: $m = 0$. Az ellenhipotézis: $H1$: $m \neq 0$. A próbastatisztika

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{0.1683 - 0}{\sqrt{2}}\sqrt{6} = 0.292$$

A korlát, amivel ezt össze kell hasonlítani

$$K = \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}) = \Phi^{-1}(0.995) = 2.575$$

Döntés: $|u| < K$, ezért a nullhipotézist *elfogadjuk*.

10.2 Az 1 kg-os kiszerelésű savanyú káposzta csomagolása során a zacskóba kerülő káposzta tömege (amit gramm-ban mérünk) normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értékét és szórását nem ismerjük. A gyártó persze azt állítja, hogy a várható érték legalább 1000. Ennek ellenőrzésére mintát vettünk a káposztás zacskókból, és a következő tömegeket mértük: 1005; 1004; 1002; 998; 1004; 999. Döntsünk 90%-os szinten arról, hogy a gyártó állítása igaz-e.

Megoldás:
Elvileg egymintás, egyoldali t-próbát kellene végezni, mert a szórás nem ismert, és a nullhipotézis egy *egyenlőtlenség*, miszerint H0: $m \geq 1000$ (ahol szokás szerint m-mel jelöltük az ismeretlen várható értéket). $\mu := 1000$ jelölje a hipotézisbeli alsó korlátot m-re. A próba arról szól, hogy a mintaátlagot ($\bar{x}$) összehasonlítjuk μ-vel, és ha az eltérés túl nagy *a megfelelő irányban*, akkor a hipotézist elutasítjuk. **Esetünkben nincs mit számolni**, mert $\bar{x} = 1002$ **nagyobb** mint μ, vagyis a mérésünk **megerősíti a hipotézist**: tuti, hogy nem utasítjuk el.

Ha valaki mégis végig akarja csinálni a próbát: az elemszám $n = 6$, az átlag $\bar{x} = 1002$, a tapasztalati szórásnégyzet

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{6}[3^2 + 2^2 + 0^2 + (-4)^2 + 2^2 + (-3)^2] = \frac{42}{6} = 7,$$

a korrigált tapasztalati szórásnégyzet $s_n^{*2} = \frac{n}{n-1}s_n^2 = \frac{6}{5} \cdot 7 = 8.4$, így

$$s_n^* = \sqrt{8.4} \approx 2.898.$$

A próbastatisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} \approx \frac{2}{2.898}\sqrt{6} \approx 1.69,$$

ezt kell összehasonlítani az $n - 1 = 5$ szabadsági fokú t-eloszlás $1 - \varepsilon$-kvantilisével, ahol $1 - \varepsilon = 90\%$, vagyis $\varepsilon = 0.1$. A táblázat szerint a küszöbérték $K = 1.476$.

Most kell észnél lenni: Mi is az elutasítás feltétele? A próbánk *egyoldali*, akkor kell a nullhipotézist elutasítanunk, ha $\bar{x}$ *túl kicsi*, vagyis ha t *túlságosan nagy abszolút értékű negatív szám.* Vagyis az elutasítás feltétele $t < -K$, ami *nem teljesül.* (Ehelyett az teljesül, hogy $t > K$, de ettől nem fogjuk a hipotézist elvetni, *sőt.*) Ezért *A hipotézist elfogadjuk.*

10.3 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig $8M\Omega$. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

Megoldás:
Kétmintás egyoldali u-próbát végzünk, a nullhipotézis H0: $m_A \geq m_B$. A teszt-statisztika

$$u = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}},$$

ahol $n_A = 9$, $n_B = 6$, $\bar{x}_A = 759$, $\bar{x}_B = 763$, $\sigma_A = \sigma_B = 8$. A korrigált tapasztalati szórásnégyzetekre nincs szükség, mert a szórás ismert. Mindezt behelyettesítve

$$u = \frac{759 - 763}{\sqrt{\frac{8^2}{9} + \frac{8^2}{6}}} \approx -0.95.$$

A küszöbszám, amivel ezt össze kell hasonlítani, $K = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$, ahol $1-\varepsilon = 99\%$, vagyis $\varepsilon = 0.01$. A táblázat szerint a küszöbérték $K \approx 2.33$.

Döntés: Mivel a próbánk egyoldali és a nullhipotézis szerint $m_A \geq m_B$, a nullhipotézist akkor kell elutasítanunk, ha az A adatsor átlaga sokkal kisebb, mint a B adatsor átlaga, vagyis ha t egy túlságosan nagy abszolút értékű negatív szám. Az elutasítás feltétele tehát $t < -K$, ami *nem teljesül*, ezért a nullhipotézist *elfogadjuk.*

10.4 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig ismeretlen (de minden mérésnél azonos). Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

Megoldás:
Kétmintás egyoldali t-próbát végzünk, a nullhipotézis H0: $m_A \geq m_B$. A teszt-statisztika

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{(n_A-1)\sigma_A^{*2}+(n_B-1)\sigma_B^{*2}}{n_A+n_B-2}}} \sqrt{\frac{n_A n_B}{n_A + n_B}},$$

ahol $n_A = 9$, $n_B = 6$, $\bar{x}_A = 759$, $\bar{x}_B = 763$, $\sigma_A^{*2} = 87$, $\sigma_B^{*2} = 44.8$. Mindezt behelyettesítve

$$t = \frac{759 - 763}{\sqrt{\frac{(9-1)87+(6-1)44.8}{9+6-2}}} \sqrt{\frac{9 \cdot 6}{9 + 6}} \approx -0.902.$$

Ezt kell összehasonlítani az $n_A + n_B - 2 = 13$ szabadsági fokú t-eloszlás $1 - \varepsilon$-kvantilisével, ahol $1 - \varepsilon = 99\%$, vagyis $\varepsilon = 0.01$. A táblázat szerint a küszöbérték $K = 2.650$.

Döntés: Mivel a próbánk egyoldali és a nullhipotézis szerint $m_A \geq m_B$, a nullhipotézist akkor kell elutasítanunk, ha az A adatsor átlaga sokkal kisebb, mint a B adatsor átlaga, vagyis ha t egy túlságosan nagy abszolút értékű negatív szám. Az elutasítás feltétele tehát $t < -K$, ami *nem teljesül*, ezért a nullhipotézist *elfogadjuk.*

10.5 Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legalább 7000 méter magas.

Megoldás: Egymintás egyoldali u-próbát végzünk $X \sim \mathcal{N}(m, 20^2)$ eloszlású mintával, ahol $\mu = 7000$ és a nullhipotézis $m \geq \mu$. Ehhez először kiszámoljuk a $\bar{x}$ mintaátlagot, ami $\bar{x} = 7000.5$-nek adódik. Ebből $\bar{x} > \mu$ miatt rögtön látszik, hogy a teszt-statisztika *pozitív lesz.* A hipotézisbeli egyenlőtlenség iránya olyan, hogy ez éppen hogy megerősíti a hipotézist (a t-t valami negatív küszöbszámmal kellene összehasonlítani), így további számolás nélkül biztos, hogy *a hipotézis elfogadjuk.*

10.6 Ha egy ember kitölt egy IQ-tesztet, az eredmény normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értékét definíció szerint az illető ember *intelligencia-hányadosának* nevezzük, szórása pedig 3. Ádám és Éva is kitöltött néhány független IQ-tesztet, egymástól is függetlenül. Ádám pontszámai: 111, 108, 111, 112. Éva pontszámai: 114, 112, 114, 119, 113. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Ádám és Éva intelligencia-hányadosa azonos.

Megoldás: Ismert szórású normális eloszlásokból vettünk mintát, a cél pedig a várható értékek összehasonlítása. Jelöljük x_i-vel az Ádám, y_i-vel pedig az Éva pontszámait. A nullhipotézis $m_x = m_y$. Ezért kétmintás kétoldali u-próbát végzünk. A szórások $\sigma_1 = \sigma_2 = 3$, a minta-elemszámok $n_1 = 4$ és $n_2 = 5$. Az átlagok $\bar{x} = \frac{111+108+111+112}{4} = 110.5$ és $\bar{y} = \frac{114+112+114+119+113}{5} = 114.4$. A teszt-statisztika a képletgyűjtemény szerint

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} = \frac{110.5 - 114.4}{\sqrt{\frac{3^2}{4} + \frac{3^2}{5}}} = \frac{-3.9}{3\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}}} \approx -1.938.$$

$1 - \varepsilon = 95\%$-os szinten akarunk dönteni, vagyis $\varepsilon = 0.05$. A küszöbérték a képletgyűjtemény szerint

$$K = u_{\frac{\varepsilon}{2}} = \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2}) = \phi^{-1}(0.975) \approx 1.96.$$

Döntés: $|u| \leq K$, azért a hipotézist *elfogadjuk*.

10.7 Móricka egy dobókockával 120-szor dobott: 1-est 34-szer, 2-est 19-szer 3-ast 20-szor, 4-est 14-szer, 5-öst 23-szor és 6-ost 10-szer. Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a kocka szabályos.

Megoldás: Illeszkedésvizsgálatot végzünk, a hipotetikus eloszlás egyenletes az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmazon. A képletgyűjtemény jelöléseivel $n = 120$ a minta mérete, $r = 6$ kategória mindegyikének hipotetikus valószínűsége $p_1 = 1/6$, a találat-számok a ν_i-k. Táblázatban

i	1	2	3	4	5	6
p_i	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
np_i	20	20	20	20	20	20
ν_i	34	19	20	14	23	10

Ebből a képletgyűjtemény szerint a teszt-statisztika

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^{6} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} \\ &= \frac{(34-20)^2}{20} + \frac{(19-20)^2}{20} + \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(14-20)^2}{20} + \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(10-20)^2}{20} \\ &= 17.1\end{aligned}$$

Mivel a konfidenciaszint 99%, ugyancsak a képletgyűjtemény szerint $\varepsilon = 0.01$ és a küszöbérték a $df = r - 1 = 5$ szabadsági fokú χ-négyzet eloszlás $1 - \varepsilon$ kvantilise, a táblázat szerint $K = 15.086$.

Döntés: mivel $\chi^2 > K$, a hipotézist *elvetjük*.

10.8 Pistike 1000-szer feldobott egy pénzérmét, és ebből 540-szer jött ki fej. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az érme szabályos – vagyis a fej valószínűsége $\frac{1}{2}$.

10.9 Pistike egy dobókockával 50 próbálkozásból 10-szer dobott hatost. Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a kockáján a hatos valószínűsége $\frac{1}{6}$.

10.10 Egy újonnan kifejlesztett müzli ötféle magot (A, B, C, D és E) tartalmaz, melyek százalékos megoszlása a terméken lévő tájékoztató szerint 35%, 20%, 25%, 10%, illetve 10%. Egy véletlenül kiválasztott zacskóban az alábbi mennyiségi megoszlást találtuk:

Összetevő	A	B	C	D	E
darabszám	552	300	435	189	204

Döntsön 90%-os szinten arról, hogy a minta összetétele megfelel-e a csomagoláson feltüntetettnek!

10.11 Egy pszeudo-véletlen biteket generáló program esetén azt szeretnénk tesztelni, hogy két egymást követő bit függetlennek tekinthető-e. Ezért független mintát vettünk a program által generált bit-*párokból*, és a következő eredményt kaptuk: $(0;0)$-ból 250 darab, $(0;1)$-ből 270 darab, $(1;0)$-ból 231 darab, $(1;1)$-ből 249 darab.

Viszgáljuk meg 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy két egymást követő bit független.

10.12 Egy országban azt szeretnénk kideríteni, hogy a városi és falusi lakosság iskolázottságának eloszlása megegyezik-e. Ehhez három iskolázottsági osztályt különböztetünk meg: alacsony, átlagos és magas. Mintát veszünk mind a városi, mind a falusi lakosságból, és megvizsgáljuk a képzettségüket. Az eredményeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze:

	alacsony képzettség	átlagos képzettség	magas képzettség
városiak	109	365	26
falusiak	192	249	9

Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a képzettségi eloszlások megegyeznek.

Megoldás: homogenitás-vizsgálatot végzünk, a null-hipotézis szerint a táblázat két sora ugyanazon (ismeretlen) eloszlásból vett mintának felel meg. A képletgyűjtemény jelöléseivel a mintaméretek $n = 500$ illetve $m = 450$, a kategóriák száma $r = 3$, a találat-számok pedig

i	1	2	3
ν_i	109	365	26
μ_i	192	249	9

Ebből a képletgyűjtemény szerint a teszt-statisztika

$$\begin{aligned}\chi^2 &= nm \sum_{i=1}^{3} \frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i + \mu_i} \\ &= 500 \cdot 450 \left[\frac{\left(\frac{109}{500} - \frac{192}{450}\right)^2}{109 + 192} + \frac{\left(\frac{365}{500} - \frac{249}{450}\right)^2}{365 + 249} + \frac{\left(\frac{26}{500} - \frac{9}{450}\right)^2}{26 + 9} \right] \\ &\approx 50.57\end{aligned}$$

Mivel a konfidenciaszint 95%, ugyancsak a képletgyűjtemény szerint $\varepsilon = 0.05$ és a küszöbérték a $df = r - 1 = 2$ szabadsági fokú χ-négyzet eloszlás $1 - \varepsilon$ kvantilise, a táblázat szerint $K = 5.991$.

Döntés: mivel $\chi^2 > K$, a null-hipotézist *elvetjük*.