Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika
gyakorló feladatok, 2020 ősz

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás alapok

1.1 Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X-szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y-nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

1.2 Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3 \ldots$-re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim Bin(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$-re számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(Tipp: $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$*.)*

1.3 Pistikéék padlásán egy villanykörte van felszerelve, aminek az élettartama exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. Pistike csak évente kétszer megy fel a padlásra: december 23-án a karácsonyfadíszekért, illetve január 23-án, eltenni a karácsonyfadíszeket.

Legutóbb, amikor Pistike december 23-án felment, azt vette észre, hogy az égőt felkapcsolva felejtette (nyilván január 23-án, amikor legutóbb ott járt), de már kiégett. Mi annak a valószínűsége, hogy az égő több, mint fél évet világított feleslegesen?

1.4 Pistike minden nyári este tesz egy sétát, és közben az eget nézi, hullócsillagokat figyelve. Egy este átlagosan 4-et szokott látni. Ennek megfelelően, ha 4-et vagy többet lát, akkor vidáman megy haza, ha viszont kevesebbet, akkor bánatosan.

Pistike augusztus 16-án bánatosan ment haza. Ezt tudva, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen hullócsillagot sem látott?

(Rávezető kérdés: Legyen X a Pistike által augusztus 16-án látott hullócsillagok száma - ami persze egy valószínűségi változó. Mi X eloszlása? Pontosabban: Milyen eloszlással jó modellezni X-et?)

2. Generátorfüggvény-módszer

2.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

(a) Mennyi c értéke?

(b) Mennyi X várható értéke?

(c) Mennyi X szórása?

(d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

2.2 Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X szórása?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

2.3 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyiszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

a.) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. *(Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)*

b.) Mennyi Y várható értéke?

2.4 Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X-re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!". Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i-edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

2.5 Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

a.) X generátorfüggvényét,

b.) X várható értékét,

c.) X szórását.

2.6 Legyen $N \sim Geom(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim Geom(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

2.7 a.) Legyen $X \sim PesszGeom(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\mathbb{V}arY$?

c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim Geom(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\mathbb{V}arZ$ szórásnégyzetet!

2.8 Legyen $X \sim Poi(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!

2.9 Legyenek $N \sim Bin\left(10, \frac{1}{2}\right)$ és $X_1, X_2, \dots \sim B\left(\frac{1}{3}\right)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

2.10 Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0,1)$-re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0,1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0,1]$ intervallumon ne csak konvex, hanem *szigorúan konvex* legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

3. Galton-Watson folyamat

3.1 Mócika, népes családjában, pilótajátékot szervez. A játék résztvevői nem túl kitartóak: minden egyes résztvevő addig próbál újabb és újabb résztvevőket beszervezni, amíg először kudarc nem éri (vagyis vissza nem utasítják), az első kudarc után viszont leáll. A kudarc valószínűsége pedig minden egyes beszervezési kísérletnél p, az előzményektől függetlenül.

A játék első résztvevője Móricka, ő alkotja egyedül a nulladik generációt. Az első generációt a Móricka által (közvetlenül) beszervezettek alkotják, a második generációt az első generáció tagjai által beszervezettek, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a teljes játék összrésztvevőszámát (vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{2}{3}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{3}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a játék előbb-utóbb elakad (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)?

e.) Mennyi N várható értéke?

f.) Mi N generátorfüggvénye?

3.2 Egy atomreaktorban sok olyan atommag van, ami maghasadásra képes, ha egy neutron eltalálja. Egy, a reaktorba bekerülő neutron sorsa kétféle lehet:

i.) Kirepül a reaktorból, vagy elnyelődik (pl. egy nem hasadó atommagban) anélkül, hogy hasadást okozna - és ezzel elvész a láncreakció számára. Ennek valószínűsége legyen p.

ii.) Egy hasadásra képes magot eltalálva hasadást okoz. Ő maga elnyelődik, helyette a hasadás során véletlen számú másik neutron szabadul fel: 1, 2 vagy 3, azonos (vagyis $\frac{1-p}{3}$) valószínűséggel.

Az egyes neutronok sorsa független egymástól és az előzményektől. A p paraméter értéke a reaktor méretének és alakjának változtatásával (vagyis szabályozórudak mozgatásával) állítható.

Belövünk a reaktorba egyetlen neutront – legyen ez egymaga a „nulladik generáció”. Az „első generáció” álljon a legelső neutron által okozott hasadás során létrejövő neutronokból (ha van ilyen). A „második generáció” álljon az első generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból. És így tovább, az $n+1$-edik generáció álljon az n-edik generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból, $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemeinek számát. Legyen $X = Z_1$, és legyen $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ a láncreakcióban résztvevő neutronok össz-száma.

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I.) ha $p = \frac{5}{8}$

II.) ha $p = \frac{1}{4}$.

a.) Mi X eloszlása?

b.) $\mathbb{E}X =?$

c.) Mi X generátorfüggvénye?

d.) $\mathbb{E}Z_{20} =?$

e.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

f.) $\mathbb{E}N =?$

g.) $\mathbb{P}(Z_4 = 0) =?$

h.) Mennyi a valószínűsége, hogy a láncreakció előbb-utóbb leáll, vagyis hogy valamelyik generáció már üres?

3.3 Móricka az egyetemi órák látogatásának egészségügyi kockázatairól ír egy kamu láncleveletet, és elküldi 10 ismerősének a nulladik napon. A levélben benne van, hogy a címzett küldje tovább újabb 10 embernek. A levelet a címzettek egymástól függetlenül 90% valószínűséggel olvasatlanul törlik, ám a maradék 10% valószínűséggel tényleg továbbküldik 10 embernek, a következő napon.

a.) Várhatóan hányan küldenek levelet a harmadik napon?

b.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb senki nem küldi tovább a levelet?

c.) Mennyi a levelet továbbküldő emberek számának várható értéke?

3.4 Egy számítógépes programban egy véletlen, rekurzív rutin fut: minden egyes részfolyamat egységnyi időt vesz igénybe, ám ezen felül minden részfolyamat véletlen számú, önmagával megegyező al-folyamatot indít. Az így indított al-folyamatok száma 0, 1 vagy 2 lehet, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{3}$ és $p_2 = \frac{2}{3} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

Kezdetben egyetlen „gyökér” folyamat fut, ez alkotja egyedül a nulladik generációt. Az első generációt a „gyökér” által (közvetlenül) indított alfolyamatok alkotják, a második generációt az első generáció tagjai által indítottak, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a program futása során induló részfolyamatok teljes számát (vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$, ami egyben a program teljes futási ideje is).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{2}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a program előbb-utóbb lefut (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)?

e.) Mennyi N várható értéke?

f.) Mi N generátorfüggvénye?

3.5 Egy sort kiszolgáló számítógép a hozzá érkező, sorra kerülő feladatokat pontosan egységnyi idő alatt végzi el. Ezen időegység alatt azonban újabb feladat(ok) érkez(het)nek, melyek száma véletlen, és az előzményektől független. Ezek a feladatok beállnak a sorba, és ott várakoznak, amíg az előttük érkezett feladatokat a gép el nem végzi. Az egy időegység alatt érkező új feladatok számának eloszlása:

k	0	1	2	3
$P(k \text{ igény})$	$4/10$	p	$5/10 - p$	$1/10$

A sor kezdetben üres, az első feladat érkezésének pillanatában kezdjük az időt mérni. Nevezzük a feladatok „nulladik generációjának” a legelőször érkezett feladatot. Nevezzük „első generációnak” azokat a feladatokat, amik az ő elvégzése alatt érkeznek. Nevezzük „második generációnak” azokat a feladatokat, amik az első generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek, stb …Nevezzük „(n+1)-edik generációnak” azokat a feladatokat, amik az n-edik generációba tartozó feladatok elvégzése alatt érkeznek. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemszámát, $n = 0, 1, 2, \dots$. Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. ha $p = 4/10$,

II. ha $p = 2/10$.

a.) Mennyi Z_1 várható értéke?

b.) Mi Z_1 generátorfüggvénye?

c.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

d.) Mennyi Z_{72} várható értéke?

e.) Mennyi az $r_3 := \mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

f.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sor előbb-utóbb újra üres lesz? *(Segítség: egy harmadfokú egyenletet könnyű megoldani, ha ismerjük az egyik gyökét.)*

g.) Mennyi a foglaltsági periódus hosszának várható értéke? (A foglaltsági periódus az a véletlen időszak, aminek a végén először lesz a sor újra üres.)

3.6 Egy vicc úgy terjed, hogy mindenki, aki meghallja, véletlen számú új embernek meséli el, éspedig 0, 1, 2 vagy 3 új embernek, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ és $p_3 = \frac{1}{2} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

A viccet Móricka találja ki, ő alkotja egyedül a nulladik generációt. Első generációnak nevezzük azokat, akinek Móricka maga meséli el a viccet, második generációnak azokat, akiknek az első generáció tagjai mesélik el, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a viccet megismerő emberek teljes számát (Mórickát is beleértve, vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{3}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{6}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{12} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a vicc terjedése előbb-utóbb megáll (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)? *(Segítség: ha egy harmadfokú egyenletnek ismerjük egy gyökét, akkor a gyöktényezőt kiemelve a többi gyökre másodfokú egyenletet kapunk.)*

e.) Mennyi N várható értéke?

3.7 Egy boltban minden vevő kiszolgálása pontosan egy percig tart. Ez alatt véletlen számú újabb vevő érkezik, és beállnak a sorba. Az egyes vevők kiszolgálása alatt érkező új vevők száma független és azonos, $\lambda = \frac{3}{4}$ paraméterű Poisson eloszlású.

A legelső vevő Pistike, nevezzük őt egymagát a vevők „nulladik generáció”-jának. Az ő kiszolgálása alatt érkező vevők legyenek az „első generáció”. Az első generáció tagjainak kiszolgálása alatt érkezők alkossák a vevők „második generáció”-ját, stb. Az n-edik generációba tartozó vevők számát jelöljük Z_n-nel ($n = 0, 1, 2 \dots$).

(a) Vegyük észre, hogy Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mi az egylépéses utódszámeloszlás generátorfüggvénye és várható értéke?

(b) Mennyi Z_{10} várható értéke?

(c) Mi Z_3 generátorfüggvénye?

(d) Számoljuk ki a $\mathbb{P}(Z_2 = 0)$, $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ és $\mathbb{P}(Z_4 = 0)$ valószínűségeket.

(e) A boltos akkor tarthat pihenőt, ha egyszer csak üres lesz a sor. Vegyük észre, hogy ez pontosan akkor következik be, ha valamelyik generáció már üres – vagyis az elágazó folyamat kihal. Mi annak a valószínűsége, hogy ez előbb-utóbb bekövetkezik?

(f) Mennyi a boltos első pihenőjéig kiszolgált összes vevő számának várható értéke?

(g) **Bónusz feladat:** Mi a válasz a 7e kérdésre, ha a fenti $\lambda = \frac{3}{4}$ helyett $\lambda = 2$?

3.8 Egy hálózati kiszolgáló minden beérkező igényt pontosan 1 időegység alatt szolgál ki. Az igények pedig $\frac{2}{3}$ rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek és állnak be a kiszolgálási sorba, vagyis az egy igény kiszolgálásával töltött 1 időegység alatt érkező újabb igények száma $\frac{2}{3}$ paraméterű Poisson eloszlású, és független az előzményektől. A $t = 0$ pillanatban az addig üres sorba megérkezik az első igény, és ezzel kezdetét veszi egy „foglaltsági periódus", ami addig tart, amíg egy igény kiszolgálása után újra üres nem lesz a sor. Számoljuk ki a foglaltsági periódus hosszának várható értékét!

3.9 Legyen Z_k Galton-Watson elágazó folyamat, ahol az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{z-1}$. Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

3.10 Legyen Z_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Galton-Watson elágazó folyamat, ahol $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

3.11 Egy Galton-Watson elágazó folyamatban az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{\frac{z-1}{2}}$. Mennyi a kihalás valószínűsége?

4. Poisson folyamat

4.1 Egy várban lévő száraz kút mellett rengeteg túrista megy el. Ezek mindegyike egymástól függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel egy pénzérmét dob a kútba, amibe így egy nap alatt átlagosan 50 érme hull. Ezek mindegyike 50% valószínűséggel esik a „FEJ" oldalával felfelé, a többitől függetlenül.

a.) Legyen X az egy nap alatt (mondjuk június 1-én) a kútba dobott érmék száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség?

b.) Legyen Y az egy nap alatt „FEJ" oldalával felfelé a kútba eső érmék száma. A teljes várható érték tétel segítségével számoljuk ki Y várható értékét. *(Segítség: Mi is lesz Y feltételes eloszlása (ill. feltételes várható értéke) az $\{X = n\}$ feltétel mellett?)*

c.) Számoljuk ki Y eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűségeket a teljes valószínűség tétel segítségével! *(Segítség: $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x$.)*

4.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágnak. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?

b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

4.3 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhuba van, véletlenszerűen elszórva.

a.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhuba van?

b.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhuba van?

c.) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$-a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

4.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k-kra)?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

4.5 Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfarészecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

4.6 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

i.) ha az időt években mérjük?

ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? *(Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!)*

c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X-szel jelöljük a 3 másodperc alatt *bekövetkező* bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt *észlelt* bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? *(Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!)*

e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

4.7 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?

c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

4.8 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*

4.9 A postafiókomba az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek (éjjel-nappal egyenletesen), naponta átlagosan 24. Minden email a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel spam; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem spam, de nincs is vele teendő; a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel viszont azt eredményezi, hogy valamit csinálni kell.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggel 8-tól 10 óráig 4-nél több emailt kapok?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 3 olyan email érkezik, amivel teendő lesz?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 5 email érkezik, de spam egy se? (*Vigyázat: Az emailek száma és a spamek száma nem független! Tipp: a spamek száma viszont független a többi email számától. Miért is?)*

4.10 Egy internetes kiszolgálóhoz percenként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?

b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?

c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

5. Berry-Esseen tétel

5.1 Egy bolha a számegyenesen ugrál. A nullából indul, és minden egész másodpercben ugrik. Az egyes ugrások függetlenek, és egyenletes eloszlásúak $[-1;1]$-en. Vagyis a bolha helye n másodperc elteltével $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[-1;1]$ intervallumon.

a.) Legyen $n = 1000000$ (vagyis a bolha kb. 11 órája és 34 perce ugrál). Ha ekkor a $\mathbb{P}(S_n > 100)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)

b.) Azt szeretnénk, hogy a $\mathbb{P}(S_n > 100)$ közelítésének hibája legfeljebb 10^{-5} legyen. Legalább mennyinek kell lenni n-nek? (Kb. hány évig kell ehhez a bolhát ugráltatni?)

5.2 Egy béka a számegyenesen ugrál. A nullából indul, majd minden másodpercben ugrik egyet: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egy egységnyit jobbra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig egy egységnyit balra – az előzményektől függetlenül. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 150 ugrás után legalább 10 egységnyivel jutott jobbra. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstanst vehetjük* 0.4748*-nak.)*

5.3 Pistike iskola után nem megy csak úgy haza: az iskolakapun való kilépést követően minden másodpercben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel egyet lép előre (hazafelé), $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont kettőt hátra (vagyis az ellenkező irányba), az előzményektől függetlenül. Az apukája a centrális határeloszlás tétel segítségével megbecsüli annak valószínűségét, hogy egy óra elteltével Pistike legalább 200 lépésnyit közeledett otthonához. Legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$-nek.) (*Bónusz kérdés*: hogyan viszonyul ez a hiba az apuka becslésének eredményéhez? Miben lehet biztos az apuka?)

5.4 Móricka 10000-szer dob egy szabályos dobókockával.

a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak valószínűségét, hogy a dobott számok átlaga legalább 3.7.

b.) A Berry-Esseen tétel szerint legfeljebb mennyi lehet a CHT közelítés hibája?

6. Nagy eltérések

6.1 Bergengócia elektromos hálózatára tízezer fogyasztó kapcsolódik. Közülük 9000-nek 32 amperes biztosítéka van, vagyis az általa felvett teljesítmény legfeljebb $32A \times 230V = 7360W$ lehet. A maradék 1000 fogyasztónak 100 amperes biztosítéka van, így legfeljebb $100A \times 230V = 23000W$ teljesítményt vehet fel. Bergengóciában a „csúcsidő” délután 2-kor van, ekkor mérik a legnagyobb fogyasztást. A bergengóc elektromos műveknek az egyes fogyasztók csúcsidőbeli fogyasztásának eloszlásáról (a fenti korlátokon túl) fogalma sincs, de azt tudják, hogy az egyes fogyasztók fogyasztásai függetlenek, és hogy az *átlagos össz-fogyasztás* csúcsidőben $3.2 \cdot 10^7 W$. Mekkora kell legyen az elektromos hálózat K össz-teljesítménye (Watt-ban), ha azt akarják, hogy a csúcsidőbeli össz-fogyasztás $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel K alatt maradjon?

6.2 Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?

6.3 Egy vizsgán 120 hallgató jelenik meg, közülük 90 készült, 30 pedig nem. Aki készült, 90% valószínűséggel megy át, aki viszont nem, az csak 30%-kal. Adjuk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a hallgatók legalább fele megbukik.

6.4 Móricka elhatározza, hogy addig dobál egy dobókockát, amíg 1000-szer ki nem jön neki a hatos. (Persze nem feltétlenül kell az 1000 hatosnak egymás után kijönni.) Valamelyik nagy eltérés tétel segítségével becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez legfeljebb 5000 dobásból sikerül neki.

(Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

(ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$

(ha $x > 1$).)

6.5 Egy vizsgán 400 hallgató vesz részt, és mindegyikük a többitől függetlenül $p = \frac{3}{4}$ valószínűséggel vizsgázik sikeresen. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a résztvevők legalább fele megbukik.

Tipp: a bukottak számát írjuk fel mint független, azonos eloszlású (indikátor) valószínűségi változók összegét.

Tipp: mind a Hoeffding egyenlőtlenség, mind a Cramér tétel használható.

*Vigyázat: a centrális határeloszlás tétellel történő közelítés viszont **nem** nagy eltérés becslés.*

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \quad \text{(ha } 0 < x < 1\text{)}.$$

6.6 Egy 45 pontos ZH-n a hallgatók hosszú évek tapasztalata szerint átlagosan 29 pontot szoktak elérni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy idén a 130 hallgató átlaga legfeljebb 20 pont lesz. *(Tegyük fel, hogy a feladatsor ugyanolyan nehéz, mint máskor, és a hallgatók is ugyanolyan felkészültek, mint máskor. Az egyes hallgatók eredményei függetlenek. Negatív pontszámot nem lehet elérni.)*

6.7 Egy kis telefonközpontba érkező, egymást követő hívások között eltelt idő mindig exponenciális eloszlású 1 perc várható értékkel, és független az előzményektől. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 5 órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

6.8 Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint $2,5$ órát kell várni.

(Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad \textit{(ha } x > 0\textit{)}.$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad \textit{(ha } x > 0\textit{).)}$$

6.9 Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 1000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen,

a.) a Hoeffding egyenlőtlenség segítségével,

b.) a Cramér tétel segítségével.

c.) Es akkor mi jön ki, ha $n = 10000$?

(Tipp: Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás.)

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = -x \ln \frac{p}{x} - (1 - x) \ln \frac{1 - p}{1 - x}.$$

6.10 Egy nagy országban a sok szavazó 2 pártra oszlik: 70%-uk a „Mindenkit Utálunk" párt (MU) híve, 30%-uk pedig a „Becsüljetek Minket" párt (BM) támogatója. Egy közvéleménykutató intézet 500 szavazót kérdez meg a pártszimpátiájáról. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a kutatás a BM pártot mutatja erősebbnek.

Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{(1 - p)x}{p(1 - x)} - \ln \frac{1 - p}{1 - x}.$$

A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$

6.11 Egy épülő szennyvíztisztító üzem kapacitása 320000 liter/nap. A szennyvíztisztító 1500 háztartást szolgál ki, melyeket a következő kategóriákba sorolnak:

- kicsi, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 100 liter, de semmiképpen nem több, mint 300 liter;
- közepes, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 200 liter, de semmiképpen nem több, mint 500 liter;
- nagy, amelynek átlagos napi szennyvíztermelése 300 liter, de semmiképpen nem több, mint 800 liter.

Az egyes kategóriákba tartozó háztartások száma rendre 400, 800 illetve 300. Az egyes háztartások napi szennyvíztermelése függetlennek tekinthető.

a.) Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy egy adott napon az üzem nem képes a termelt szennyvizet megtisztítani.

b.) Az üzemeltető elégedetlen az előző részben kijött eredménnyel. Adjunk felső becslést arra, hogy mekkorára növeljék az üzem kapacitását ahhoz, hogy a túllépés kockázata 10^{-8} alá csökkenjen.

6.12 Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

c.) X_k egyenletes a $[0, 1]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

d.) X_k egyenletes a $[0, k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

e.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k+1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

6.13 Egy koncessziós pályázat 10 fejezetből áll, a pályázók minden fejezetre legfeljebb 5 pontot kaphatnak. A bírálók a megítélt pontszámot fejezetenként kockadobással döntik el, azonos esélyt adva a $0, 1, 2, 3, 4, 5$ pontszámoknak. A felhívásra 10000 pályázat érkezik. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a pályázatok átlagos pontszáma eléri a 26-ot. *(Vigyázat: hányszor is gurítják el a bírálók azt a dobókockát?)*

(A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right) \qquad (\textit{ha } 0 < x < 1).)$$

6.14 Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos Bernoulli eloszlású valószínűségi változók sorozata $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel (vagyis $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}$). Legyen $n = 10^6$ és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (vagyis $S_n \sim Bin(n = 10^6; p = \frac{1}{2})$).

a.) Ha valamilyen $K \in (0; 10^6)$-ra a $\mathbb{P}(S_n < K)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esseen tétel szerint? (A Berry-Esseen tételben szereplő C konstans egy 2011-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)

b.) A Hoeffding egyenlőtlenség segítségével keressünk olyan K korlátot, amire biztosan igaz, hogy

$$\mathbb{P}(S_n \geq K) \leq 10^{-8}.$$

Nevezzük ezt a K korlátot K_H-nak.

c.) Közelítsük a $\mathbb{P}(S_n \geq K_H)$ valószínűséget a Cramér tétel segítségével! Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

6.15 Egy internet-szolgáltatónak 3600 előfizetője van. Hétfőn este 8-kor minden előfizető a többiektől független véletlen sávszélesség-igénnyel lép fel, ami Mbit/s-ben mérve egyenletes eloszlású a $[0; 4]$ intervallumon. A szolgáltatásban akkor lesz fennakadás, ha az igények összege túllépi a rendelkezésre álló 8000 Mbit/s teljes sávszélességet.

a.) A szolgáltató a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak a valószínűségét, hogy hétfő este 8-kor fennakadás lesz. Legfeljebb mennyit fog a szolgáltató *tévedni* a becsléssel a Berry-Esséen tétel szerint?

b.) Adjunk becslést a fennakadás valószínűségére a Hoeffding-egyenlőtlenség segítségével.

7. Diszkrét idejű Markov láncok

7.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból $50 - 50\%$ valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

a.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.

d.) Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?

e.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?

h.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

7.2 Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a $0, 1, 2, 3, 4$ állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy értve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.

b.) Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440" megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)

c.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a valószínűsége, hogy 3 időegység múlva a program éppen az 1-es részfeladaton dolgozik?

d.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?

e.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?

f.) A programunk processzor-igénye üresjáratban 1%, az $1, 2, 3, 4$ részfeladatok végrehajtása során pedig rendre 10%, 30%, 50% illetve 99%. mennyi az átlagos processzor-terhelés hosszú távon?

7.3 John megfigyelései szerint reggelente, amikor Londonban munkába autózik, háromféle lehet az időjárás: *esik*, *zuhog* vagy *szakad*. Tapasztalata szerint egy nap időjárásából következtetni lehet a következő nap időjárására, az alábbi valószínűségi értelemben:

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma esik}) = 1/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma esik}) = 6/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik}|\text{ma szakad}) = 2/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma szakad}) = 4/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad}|\text{ma zuhog}) = 5/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap zuhog}|\text{ma zuhog}) = 4/10.$$

Jelöljük az időjárás állapotait számokkal: $0 :=$ „esik", $1 :=$ „zuhog", $2 :=$ „szakad". Modellezzük John reggeli megfigyeléseinek sorozatát időben homogén Markov lánccal!

a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot. (Vigyázat: a fenti átmenet-valószínűségek összevissza vannak megadva.)

b.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége a „00012" megfigyelés-sorozatnak (*elsejével* kezdve)?

c.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a valószínűsége, hogy harmadikán zuhog?

d.) Feltéve, hogy elsején esik, mi a közelítő valószínűsége, hogy huszonkilencedikén zuhog?

e.) Hosszú távon a reggelek hány százalékán zuhog?

f.) Ha esik, John 20 percet autózik dugóban, ám ha zuhog, akkor 30-at, ha szakad, akkor pedig 70-et. Napi átlagban hány percet tölt reggeli dugóban autózással hosszú távon?

7.4 Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

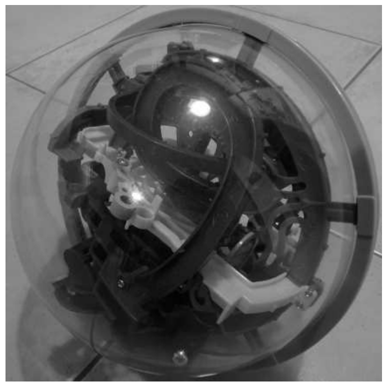
a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

c.) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

d.) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

7.5 Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet elölről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újrakezdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei $0, 1, 2, 3$.



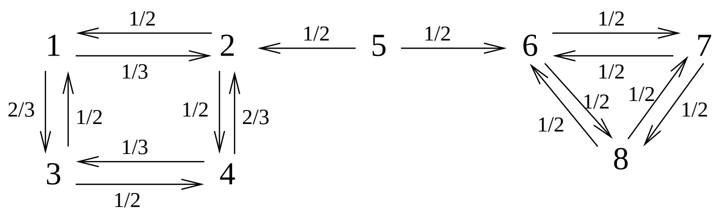
Magical Intellect Ball

a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?

c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

7.6 Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

a.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$

b.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$

c.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \,|\, X_0 = 6) \approx ?$

d.) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \,|\, X_0 = 5) \approx ?$

7.7 Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!

b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?

c.) A napok hányad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

7.8 Mari néni szeret beszélgetni, és befolyásolható. Minden este elmegy egy szomszédjához beszélgetni, és átveszi annak pártállását. Hat szomszédja van, ebből 2 fűpárti, 1 fapárti, 3 pedig virágpárti. Mari néni minden este vaktában választ beszélgetőpartnert azon 5 közül, akinél előző este *nem járt*. Jelöljük Mari néni lehetséges pártállásait $\{1, 2, 3\}$-mal, ahol „1" jelentése „fűpárti", „2" jelentése „fapárti", „3" jelentése „virágpárti". X_n pedig jelölje Mari néni pártállását n nap elteltével.

Modellezzük Mari néni állapotait időben homogén Markov láccal.

a.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát.

b.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége az 123123 állapotsorozatnak (a nulladik napot is beleértve)?

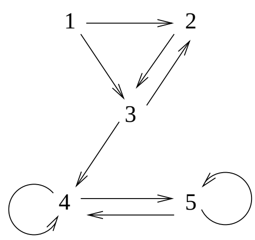
c.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége, hogy a 2-dik napon is az?

d.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz Mari néni éppen fapárti?

e.) Mari néni minden nap elmegy a gazdaboltba, és ha éppen fűpárti, akkor fűnyíródamilt vesz 500 Ft-ért, ha éppen fapárti, akkor permetszert 3000 Ft-ért, ha pedig virágpárti, akkor tápoldatot 1000 Ft-ért. Napi átlagban mennyit költ a gazdaboltban hosszú távon?

7.9 Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

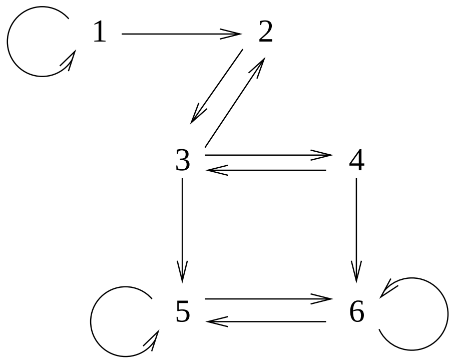
- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



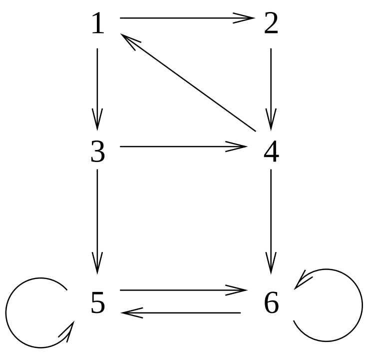
7.10 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,

- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)



2. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

7.11 A 2. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

7.12 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

- Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor őt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
- Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n-edik perc végén (pontosabban: az $n+1$-edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

a.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemes észnél lenni: mik is a **lehetséges, elérhető** állapotok?)*

b.) Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!

c.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

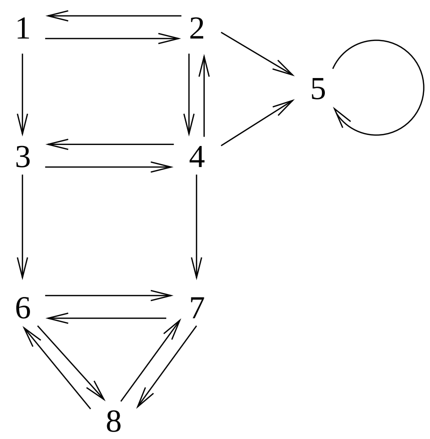
d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!

e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2\dots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?

f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ valószínűség?

g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !

h.) Mennyi $n = 29$-re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek!* ***Bónusz:*** *Számoljuk ki a* $\mathbb{P}(X_n = 3)$ *valószínűséget* $n = 10, 20, 30$*-ra valamilyen számítógépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*



3. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

7.13 A 3. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

7.14 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottéren, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat.

b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?

c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

7.15 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgálnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgálni.

Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n-edik csettintés után (vagyis az n-edik sorhossz-változás után).

a.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?

b.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?

c.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!

d.) Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

f.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? *(Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.)*

g.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

8. Folytonos idejű Markov láncok

8.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

a.) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

b.) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)

c.) Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?

d.) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?

e.) Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

8.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t. Az időt mérjük hónapokban.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünkésznél a rátákkal!*

b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?

d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?

e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

8.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár", illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel".

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

8.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír"; 2 – „alszik"; 3 – „eszik". A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy három állapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov lánc Q átmenet-valószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

8.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

a.) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

b.) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

c.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

d.) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

e.) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

8.6 Egy béka fel-le ugrál egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben.*

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! *(Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várni!)*

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

8.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörték élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$-vel a t idő elteltével működő körték számát. Az időt mérjük években.

a.) Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). *(Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük* ***valamelyik****?)*

b.) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

c.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?

d.) Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?

e.) A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

8.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov lánccal.

a.) Mi a Markov lánc állapottere?

b.) Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.

c.) Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.

d.) Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.

e.) Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?

f.) Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?

g.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.

h.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

i.) Ha a sor $t = 0$-kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?

j.) Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

8.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyereket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

a.) A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.

b.) A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$-a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

8.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

f.) A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

8.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov lánccal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).

b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.

c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.

d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?

e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

9. Maximum likelihood becslés

9.1 9-elemű mintát vettünk az X valószínűségi változóból, ami (optimista) geometriai eloszlású, számunkra ismeretlen p paraméterrel. Ezt kaptuk: $1, 8, 7, 11, 6, 5, 6, 7, 4, 3$. Adjunk maximum likelihood becslést p-re! A feladatot az is számolja rendesen végig, aki tudja, hogy mi fog kijönni.

9.2 Egy (esetleg) hamis dobókockán a 6-os valószínűsége valami ismeretlen $p \in (0; 1)$, az összes többi szám valószínűsége pedig azonos, $\frac{1-p}{5}$. A kockával 10-szer dobva mintát vettünk az eloszlásból, és azt kaptuk, hogy $5; 6; 4; 3; 4; 6; 3; 1; 6; 3$. Adjunk maximum likelihood becslést p értékére.

9.3 Mintát vettünk egy X normális eloszlású valószínűségi változóból, melynek várható értéke *ismert*: $m = 1000$, de szórása ismeretlen. Azt kaptuk, hogy 997, 1002, 998, 1003, 996, 1001, 998, 1004, 1005. Adjunk maximum likelihood becslést az eloszlás szórására.

10. Statisztikai próbák

10.1 Egy műszer hosszúságot mér μm-ben. A mérés hibájáról tudjuk, hogy normális eloszlású: $hiba \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, sőt a szórásnégyzet is ismert: $\sigma^2 = 2$. A gyártó pedig azt állítja, hogy $m = 0$. Ennek ellenőrzésére 6 próbamérést végeztünk pontosan ismert hosszúságokon, és a következő hibákat kaptuk (μm-ben): 0.5; 0.7; -0.9; -0.4; 0.01; 1.1. Döntsünk 99%-os konfidenciaszinten (vagyis $\varepsilon = 0.01$) arról a hipotézisről, hogy a gyártó igazat állít.

10.2 Az 1 kg-os kiszerelésű savanyú káposzta csomagolása során a zacskóba kerülő káposzta tömege (amit gramm-ban mérünk) normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értékét és szórását nem ismerjük. A gyártó persze azt állítja, hogy a várható érték legalább 1000. Ennek ellenőrzésére mintát vettünk a káposztás zacskókból, és a következő tömegeket mértük: 1005; 1004; 1002; 998; 1004; 999. Döntsünk 90%-os szinten arról, hogy a gyártó állítása igaz-e.

10.3 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig $8M\Omega$. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

10.4 Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig ismeretlen (de minden mérésnél azonos). Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.

10.5 Egy hegy tengerszint feletti magasságára vagyunk kíváncsiak, de csak hibával terhelten tudjuk megmérni: a mérési eredmény normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke az (általunk nem ismert) tényleges magasság, szórása pedig 20 méter. Végrehajtottunk 10 egymástól független mérést, és a következő számokat kaptuk (méterben): 7009, 7023, 6999, 6994, 6978, 7014, 6989, 6997, 7009, 6993.

Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a hegy legalább 7000 méter magas.

10.6 Ha egy ember kitölt egy IQ-tesztet, az eredmény normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értékét definíció szerint az illető ember *intelligencia-hányadosának* nevezzük, szórása pedig 3. Ádám és Éva is kitöltött néhány független IQ-tesztet, egymástól is függetlenül. Ádám pontszámai: 111, 108, 111, 112. Éva pontszámai: 114, 112, 114, 119, 113. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Ádám és Éva intelligencia-hányadosa azonos.