1.

Legyen X a megkérdezett hallgatók száma (egy adott gyakorlaton. A szöveg szerint $X \sim Geom(p)$ (az első sikerhez szükséges kísérletek számával), ahol $p = \frac{1}{100}$ (a siker-valószínűség kísérletenként).

a.) Hosszú távon az átlag a várható érték:

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{p} = \underline{\underline{100}}$$

b.) Hosszú távon az szerepel a legtöbbször, amelyik a legvalószínűbb, vagyis ahol a $p_k = (1-p)^{k-1} p \quad (k = 1, 2, \ldots)$ érték maximális. Mivel $1-p = 0.99 < 1$, ez a sorozat szig. mon. csökkenő $\Rightarrow$ a maximuma az első eleme, vagyis a $\boxed{k=1}$-hez tartozó.

$\Rightarrow$ Hosszú távon az $\boxed{1}$ kerül legtöbbször a papírra.

Megj.: Mindkét részfeladat matematikailag precíz megoldásához a nagy számok törvényére kellene hivatkozni, de mi ezt most nem mondtuk ki, így elég a fenti „átlag = várható érték" ill. „valószínűség = gyakoriság" stílusú érvelés.

2.

Legyen X az elesések száma az 500 lépésnyi távon.

A szöveg szerint $\underline{X \sim Bin(n,p)}$ (a sikeres próbálkozások

száma $\underline{n=500}$ ~~sikeres~~ független kísérletből, ahol minden

elesési kísérlet $\underline{p=\frac{1}{100}}$ valószínűséggel sikeres).

Mivel n nagy és p kicsi, jó közelítéssel $\underline{X \sim Poi(\lambda)}$,

ahol $\underline{\underline{\lambda}}=np=\underline{\underline{5}}$

Vagyis $\mathbb{P}(X=k) \approx e^{-5}\frac{5^k}{k!}$ $\quad (k=0,1,2,\dots)$

A kérdéses valószínűség

$$\mathbb{P}(X<3)=\sum_{k=0}^{2}\mathbb{P}(X=k)=e^{-5}\left(\frac{5^0}{0!}+\frac{5^1}{1!}+\frac{5^2}{2!}\right)=e^{-5}\left(1+5+\frac{25}{2}\right)$$

$$=\underline{\underline{18.5\cdot e^{-5}}}\approx 0.125=12.5\%$$

[Megj.: Persze lehet közvetlenül a binomiális eloszlással is

számolni: $\mathbb{P}(X=k)=\binom{500}{k}\left(\frac{1}{100}\right)^k\left(\frac{99}{100}\right)^{500-k}$ $\quad (k=0,1,\dots,500)$,

amiből $\mathbb{P}(X<3)=\binom{500}{0}\left(\frac{1}{100}\right)^0\left(\frac{99}{100}\right)^{500}+\binom{500}{1}\left(\frac{1}{100}\right)^1\left(\frac{99}{100}\right)^{499}+$

$+\binom{500}{2}\left(\frac{1}{100}\right)^2\left(\frac{99}{100}\right)^{498}$

jaj, de csúnya]

3

a.) Minden sűrűségfv-re igaz, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, amiből

$$1=\int_0^{24} c e^{-x}\,dx = c\left[-e^{-x}\right]_0^{24} = c\left(-e^{-24}+e^{-0}\right) = c\left(1-e^{-24}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{c=\frac{1}{1-e^{-24}}} \approx \cancel{0.0043 = 0.43\%}\ 1.00000000004 \approx 1$$

b.) $$\mathbb{P}(5<X<6)=\int_5^6 f(x)dx = c\int_5^6 e^{-x}dx = c\left[-e^{-x}\right]_5^6 = c\left(-e^{-6}+e^{-5}\right)=$$

$$= c\left(e^{-5}-e^{-6}\right) = \underline{\underline{e^{-5}\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-24}}}} \approx 0.0043 = 0.43\%$$

c.) ~~$\mathbb{P}(5<X<6)$~~ A kérdés egy <u>feltételes</u> valószínűség:

$$\mathbb{P}(5<X<6\mid X<12) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(5<X<6 \text{ és } X<12)}{\mathbb{P}(X<12)} = \frac{\mathbb{P}(5<X<6)}{\mathbb{P}(X<12)}$$

<u>persze ha $5<x<6$ igaz,</u>
akkor $X<12$ is

A számláló már volt a b.) pontban

A nevező $\mathbb{P}(X<12)=\int_0^{12} c e^{-x}dx = c\left[-e^{-x}\right]_0^{12} = c\left(1-e^{-12}\right)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(5<X<6\mid X<12) = \frac{e^{-5}-e^{-6}}{1-e^{-12}} = \underline{\underline{e^{-5}\frac{1-e^{-1}}{1-e^{-12}}}} \approx 0.0043 = 0.43\%$$

(Hát persze, $X<12$ szinte biztosan teljesül.)

4.

Mivel az exponenciális eloszlás örökifjú, vehetjük úgy, mintha mind3 körtét most üzemelnénk be újonnan.

Ezért legyen X_1, X_2, X_3 a három körte élettartama mostantól számítva, években mérve.

Tudjuk, hogy $X_1, X_2, X_3 \sim Exp(\lambda)$ és függetlenek, ahol $\frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}X_1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 1.}}$

Ebből a közös eloszlásfüggvényük

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1 < \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X_2 < \tfrac{1}{2}) = \mathbb{P}(X_3 < \tfrac{1}{2}) = F(\tfrac{1}{2}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

Vagyis

$$\mathbb{P}\left(\begin{matrix}\text{mind kiég} \\ \tfrac{1}{2} \text{ éven belül}\end{matrix}\right) = \mathbb{P}\left(X_1 < \tfrac{1}{2}, X_2 < \tfrac{1}{2}, X_3 < \tfrac{1}{2}\right) \overset{\text{függetlenség}}{=}$$

$$= \mathbb{P}(X_1 < \tfrac{1}{2}) \cdot \mathbb{P}(X_2 < \tfrac{1}{2}) \cdot \mathbb{P}(X_3 < \tfrac{1}{2}) = \underline{\underline{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)^3}} \approx \underline{0.061 = 6.1\%}$$