

- ① Legyen  $p$  az egyes gyerekek siker- valószínűsége,  
 $X$  pedig a sikeres próbálkozások száma ①/2  
 $\Rightarrow X \sim \text{Bin}(n=5; p)$ , amiből

$$P(X=0) = (1-p)^5 = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow 1-p = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p = \frac{2}{3}}$$

Vagyis konkrétan Mörickes is  $p = \frac{2}{3}$  eséllyel dob sikeresen.

- ②  $X \sim \text{Bin}(n=5, p = \frac{2}{3}) \Rightarrow P(X=k) = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$   $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

amiből konkrétan

$$\underline{P(X=3)} = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^{5-3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{1^2}{3^2} = \frac{80}{243} \approx$$

$$\approx 0.329 = \underline{\underline{32.9\%}}$$

- ③ 1., bonyolultabb megoldás: Legyen  $B$  az az esemény, hogy senkinek sem sikerül a 2. dobás.

Ha  $k$  gyerek dobhat másodszor is, akkor ennek valószínűsége  $\left(\frac{1}{2}\right)^k$  Függetlenség!  
 $(k = 0, 1, \dots, 5)$ . vagyis  $P(B|X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$  a feltételes valószínűség.

Mivel az  $\{X=0\}, \{X=1\}, \dots, \{X=5\}$  események teljes eseményrendszer,

a teljes valószínűség tétel szerint

$$P(B) = \sum_{k=0}^5 P(X=k) P(B|X=k) \stackrel{\text{elődől}}{=} \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$$

A binomiális tétel szerint  $(a+b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^k b^{5-k}$ ,

(2/2)

vagyis  $a=b=\frac{1}{3}$  helyettesítéssel  $P(B) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 0.132 = 13.2\%$

2., egyszerűbb megoldás

Minden gyerekre külön-külön

$$\begin{aligned} P(2 \text{ siker}) &= P(1. \text{ dobás sikeres}) \cdot P(2. \text{ dobás sikeres} \mid 1. \text{ sikeres}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\text{legfeljebb 1 siker}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(\text{mindenki legfeljebb 1x sikeres}) \stackrel{\text{függetlensz.}}{=} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \approx 13.2\%$$