Véletlen tagszámú összeg várható értéke és szórásnégyzete

Emlékeztető: $S_N := \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg, ha

- $X_1, X_2, X_3 \ldots$ ~~független~~ $\in \mathbb{N}$
- $X_1, X_2, X_3 \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású
- $N \in \mathbb{N}$ (esetleg véletlen)
- N független $X_1, X_2, \ldots$ -től.

Tétel: Ha $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tag~~szá~~mú összeg, akkor

$$\mathbb{E} S_N = \mathbb{E}N \, \mathbb{E}X$$

$$Var\, S_N = \mathbb{E}N \, Var X + (\mathbb{E}X)^2 \, Var N$$

[ahol $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \ldots$ az X_i-k közös várható értéke,

$Var\, X = Var\, X_1 = Var\, X_2 = \ldots$ ~ szórásnégyzete].

Biz: Tudjuk, hogy a generátorfüggvényekre $g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z))$

$\Rightarrow$ ~~$g_{S_N}'(z) = g_N'(z) g_X$~~

$$g_{S_N}'(z) = g_N'(g_X(z))\, g_X'(z)$$

$$g_{S_N}''(z) = g_N''(g_X(z)) \left[g_X'(z)\right]^2 + g_N'(g_X(z))\, g_X''(z)$$

Továbbá $g_X(1) = 1$, $g_X'(1) = \mathbb{E}X$, $g_X''(1) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X$, ...

Így $z=1$-et behelyettesítve kijön a két állítás. $\square$

Megj:1 2 speciális eset, amiből a $\mathrm{Var}\, S_N$ képlete megjegyezhető:

1.) Ha $N \equiv n = \text{const}$, akkor $\mathrm{Var} N = 0$, és a tétel szerint

$$\mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = n \,\mathrm{Var}\, X$$

2.) Ha $X \equiv x$ const, akkor $\mathrm{Var} X = 0$, és a tétel szerint

$$\mathrm{Var}(x N) = x^2 \,\mathrm{Var} N$$

[Hát persze: $D(cX) = |c| DX$]

Megj:2 A tétel akkor is igaz, ha $X_k \notin \mathbb{N}$.