Sorhossz evolúciós egyenlete : „igények" állnak „kiszolgálási sorban".

Diszkrét idejű Markov modellt nézünk: az idő $n = 0, 1, 2, \ldots$

Pl. mérjük az időt napokban, legyen X_0 a kezdeti sorhossz (az első nap 0 órakor), és legyen $n = 1, 2, 3 \ldots$ -re

X_n a sor hossza az n. nap végén (éjfélkor).

Y_n az n-edik napon érkező új igények száma

V_n, hogy az n-edik napon legfeljebb hány igényt tudunk kiszolgálni (ha van ennyi igény).

A folyamat megértéséhez tudnunk kell, hogy pl. ha egy igény a 4. napon érkezik, azt ki lehet-e szolgálni V_4 terhére — ami a valóságban függhet attól, hogy reggel vagy este érkezik, de a diszkrét idejű modellünk erről nem tud.

Modell: Az egyértelműség kedvéért feltesszük, hogy az az n-edik napon

- először kiszolgálunk V_n darab igényt (ha van ennyi),
- ez után érkezik újabb Y_n darab igény.

Pl: a könyvelő délelőtt V_n darab számlát lekönyvel az asztalán lévő kupacból, majd az iktató délután Y_n darab számlát rátesz a kupacra, X_n pedig a kupac mérete éjfélkor.

Vagyis az $(n+1)$-edik nap $(n=0,1,2,\dots)$

- X_n darab számlával indul
- feldolgozás után marad $\left\{\begin{array}{ll} X_n - V_{n+1} & , \text{ha } X_n \geq V_{n+1} \\ 0 & , \text{ha } X_n \leq V_{n+1} \end{array}\right\} = (X_n - V_{n+1})_+$

[Jelölés: $a \in \mathbb{R}$-re $a_+ := \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0 \\ 0, & \text{ha } a \leq 0 \end{cases} = \max\{a, 0\}$

az a pozitív része.]

- az új számlák érkezése után a kupac mérete

$$\boxed{X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}}$$

Ez az evolúciós egyenlet.

Feltevések:

1. $\left.\begin{array}{ll} X_0 & \text{kezdeti sorhossz} \\ V_1, V_2, V_3 \dots & \text{kapacitások} \\ Y_1, Y_2, Y_3 \dots & \text{érkezések} \end{array}\right\}$ $\in \mathbb{N}$, mind teljesen függetlenek. Így az evolúciós egyenlettel definiált X_n folyamat Markov.

[Pl.: Attól, hogy a kupac nagyi a könyvelő még nem dolgozik gyorsabban, és a számlák se érkeznek lassabban.]

2. $\left.\begin{array}{l} V_1, V_2, V_3 \dots \text{ azonos eloszlású} \sim V \\ Y_1, Y_2, Y_3, \dots \text{ azonos eloszlású} \sim Y \end{array}\right\}$ így az X_n Markov lánc időben homogén

3. Ne legyen olyan $r > 1$, hogy V_n és Y_n is csak r többszöröse lehet. Így az X_n Markov lánc irreducibilis és aperiodikus lesz.

4. legyen $\mathbb{E}V < \infty$, $\mathbb{E}Y < \infty$: elfetszerű technikai feltétel.

<u>Tétel</u> A fenti feltételek mellett, ha $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, akkor az X_n Markov lánc stabil.

<u>Biz:</u> Mivel X_n irreducibilis és aperiodikus, a <u>Foster kritérium</u> pont azt mondja, hogy a stabilitáshoz elég belátni, hogy $\exists\, d > 0$, amire igaz, hogy elég nagy $j \in \mathbb{N}$-re

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j) \le j - d,$$

vagy más szóval

$$\underbrace{\mathbb{E}(j - X_{n+1} \mid X_n = j)}_{\text{várható csökkenés}} \ge j - (j - d) = d > 0$$

Esetünkben ha $X_n = j$, akkor $X_{n+1} = (j - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$,

így a csökkenés $j - X_{n+1} = j - (j - V_{n+1})_+ - Y_{n+1}$

amiből $j - (j - V_{n+1})_+ = \begin{cases} V_{n+1}, & \text{ha } V_{n+1} \le j \\ j, & \text{ha } V_{n+1} \ge j \end{cases} = \cancel{\max}\ \min\{V_{n+1}, j\}$

Így a csökkenés (feltételes) várható értéke

$$\mathbb{E}(j - X_{n+1} \mid X_n = j) = \mathbb{E}\min\{V, j\} - \mathbb{E}Y.$$

Feltettük, hogy $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, ebből nem meglepő, hogy ha j elég nagy, akkor ~~$\mathbb{E}V$~~ $\mathbb{E}\min\{V, j\} > \mathbb{E}Y$ szintén teljesül, legyen hát ~~$d := \mathbb{E}\min\{V, j_*\} - \mathbb{E}Y > 0$ egy elég nagy j-re~~ ~~$\square$~~

$d := \mathbb{E}\min\{V, j_*\} - \mathbb{E}Y > 0$ egy elég nagy j_*-ra.

$\square$

Megj: • Ha $\mathbb{E}Y > \mathbb{E}V$, akkor X_n nyilván nem stabil; a nagy számok törvénye miatt $X_n \to \infty$, vagyis tranziens.

• Ha $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}V$, X_n akkor sem stabil (ez kicsit nehezebb.)

Késleltetés, Little formula

Egy igény késleltetése: az érkezése és a kiszolgálása között eltelt idő.

Pontosabban, a mi diszkrét idejű modellünkben legyen a késleltetés is diszkrét: egy számla késleltetése a számla által az ~~asz~~ asztalon töltött éjszakák száma, avagy azon n-ek száma, amire az adott igény X_n-be bele van számolva.

Így nálunk minden késleltetés ≥ 1.

Jelölés: $R_n := X_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n$ az n-ig beérkezett igények száma

$D_n :=$ ezen R_n darab igény összes késleltetése (persze ~~R~~ $D_n \geq R_n$).

[Megj.: Azt, hogy D_n mennyi lesz, n-kor még nem tudjuk, hiszen az R_n igényből még bent lévő X_n-ről csak ez után fog kiderülni, hogy mennyi a késleltetése.]

Def: $\bar{D} := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{D_n}{R_n}$ az átlagos késleltetés (ha létezik).

Tétel (Little formula)

Tekintsük ~~a~~ fenti sorbanállási modellt az összes eddigi feltevéssel. Legyen $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, vagyis az X_n Markov lánc stabil, és legyen az egyetlen stacionárius eloszlása Π^∞ (ami egyben a határeloszlás is).

Legyen X_∞ éppen ilyen Π^∞ eloszlású val. változó, (Vagyis $\mathbb{E}X_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} k \Pi_k^\infty$ a sorhossz várható értéke a stacionárius esetben.)

Ekkor $$\bar{D} = \frac{\mathbb{E}X_\infty}{\mathbb{E}Y}$$ 1 valószínűséggel.

Biz (vázlat)

Alapötlet: A teljes késleltetés az ~~igények~~ számlák által a ~~sorban~~ asztalon töltött éjszakák össz-száma.

Ehhez elég megnézni, hogy melyik éjszaka hány számla állt az asztalon, és összeadni.

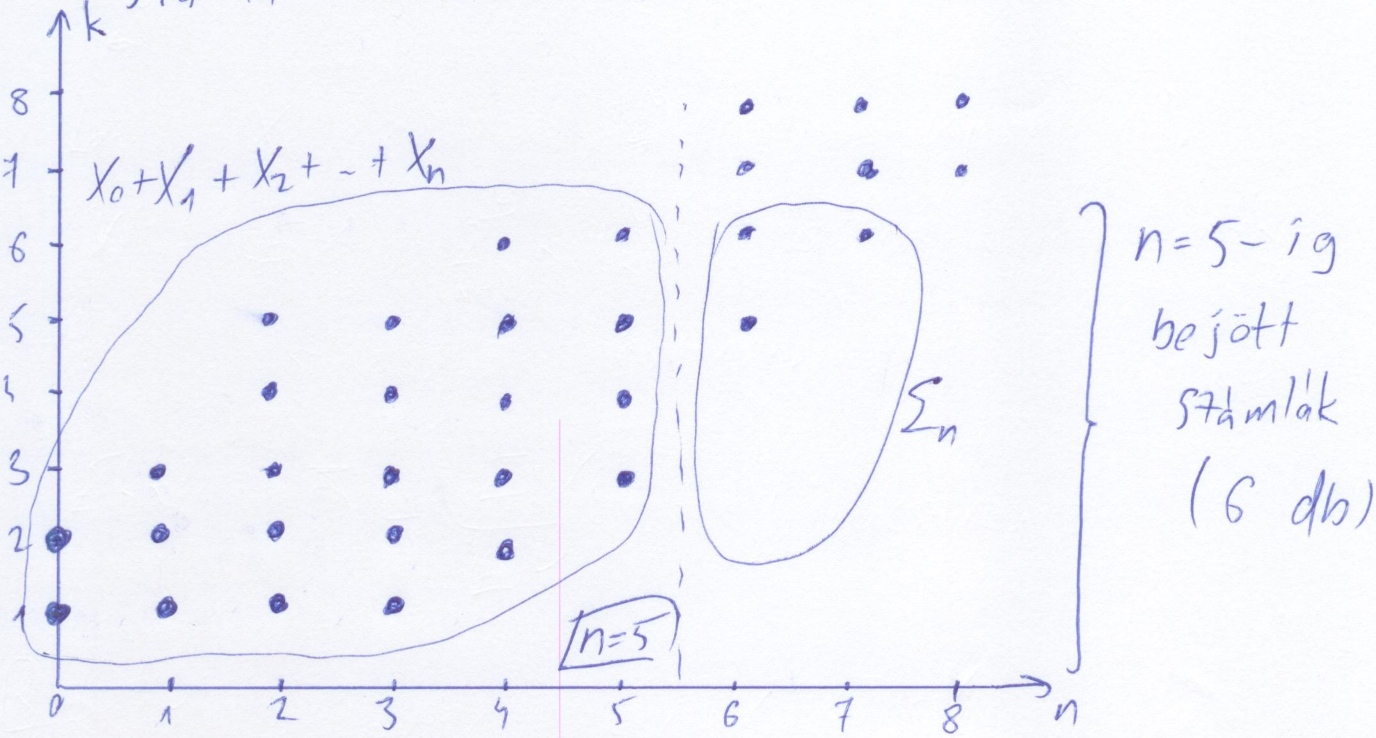
Vagyis nagy n-re $D_n \approx X_0 + X_1 + \dots + X_n$

Pontosabban: $D_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n + \varepsilon_n$, ahol

Σ_n a még bent lévő X_n darab ~~igény~~ számla késleltetése (ami még abból hátra van).

Grafikusan: • számozzuk meg a számlákat: 1, 2, 3...

• A síkon (n,k)-ba tegyünk egy pöttyöt, ha a k-adik számla az n-edik éjszakán az asztalon van



Pl: • A 2. ~~igé~~ számla már $n=0$-kor is az asztalon van és az 5. napon könyveli le, késleltetése 5

• A 4. számla a 2. napon érkezik és a 6. napon könyveli le, késleltetése 4

• $n=5$-ig 6 ~~igény~~ számla érkezik, ezek teljes késleltetése 27

• Ebből $X_0+X_1+\dots+X_5=24$

• A maradék $\Sigma_n=3$

Vagyis $D_n = X_0 + \dots + X_n + \Sigma_n$ azt jelenti, hogy a pöttyöket nem soronként, hanem oszloponként számoljuk. 8/8

(Ez lényegében két szumma felcserélése.)

Hihető: Ha a rendszer stabil, akkor Σ_n sem tart ∞-hez, ezért $\frac{\Sigma_n}{n} \to 0$.

Most jön a $\boxed{\text{LÉNYEG}}$ (matematikailag):

Az ergodtétel miatt $\frac{X_0 + X_1 + \dots + X_n}{n+1} \to \mathbb{E}X$

Köv.: $\frac{D_n}{n} = \frac{n}{n+1} \frac{X_0 + X_1 + \dots + X_n}{n+1} + \frac{\Sigma_n}{n} \to \mathbb{E}X$

Továbbá a nagy számok törvénye miatt

~~$\frac{R_n}{n} = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \to \mathbb{E}Y$~~

$$\frac{R_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \to 0 + \mathbb{E}Y$$

Összesítve: $\frac{D_n}{R_n} = \frac{D_n/n}{R_n/n} \to \frac{\mathbb{E}X}{\mathbb{E}Y}$ $\square$

Megjegyzés: A Little formula sokkal nagyobb általánosságban igaz, pl. nem csak Markov modellekre.

Az se kell (nem is tettük fel), hogy a kiszolgálás érkezési sorrendben történjen.