A nagy számok törvénye (NSzT)

Azon kevés val.szám tételek egyike, amire a köznyelv is gyakran hivatkozik: „Ami bekövetkezhet, az előbb-utóbb be is következik".

Pontosabban: ha valamivel *sokszor* próbálkozunk, az előbb-utóbb bekövetkezik, *sőt*, a bekövetkezés *gyakorisága* éppen a *valószínűség*.

[*Megj:* A „gyakoriság ≈ valószínűség" tény pont a valószínűség *heurisztikus definíciója*, ám számunkra nem def. lesz, hanem *tétel*.]

Pl: 6 millió kockadobásból kb 1 millió lesz 6-os, mert $\mathbb{P}(\text{6-os}) = \frac{1}{6}$.

FONTOS abban: a próbálkozások / kísérletek legyenek **FÜGGETLENEK**.

[Pl.: ha ugyanarról a kockadobásról készült videót nézzük meg 6 milliószor, az nem lesz jó.]

Továbbá: a tételünk erősebb / általánosabb, mint a köznyelvi változat: események / valószínűségek helyett valószínűségi változókról és várható értékekről szól.

Tétel (nagy számok erős törvénye) (NSzET)

Legyen $X_1, X_2, X_3 \dots$ teljesen független, azonos eloszlású val. változók sorozata.

Tegyük fel, hogy a (közös) várható értékük létezik:

$\mathbb{E}X_i = m$ (minden i-re).

Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ az n-edik részletösszeg.

Ekkor $\frac{S_n}{n} \longrightarrow m$ 1 valószínűséggel. (amint $n \to \infty$)

[Vagyis: ha n nagy, akkor átlag $\approx$ várható érték]

Megj. 1: A tétel igaz, ha $m \in \mathbb{R}$, de akkor is, ha $m = \infty$ vagy $m = -\infty$.

Megj. 2: Van olyan val. változó, aminek nincs várható értéke. [Pl. az $m := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ integrál nem létezik.] Ha X_i ilyen, akkor $\frac{S_n}{n}$ divergens: $\pm\infty$ között ingadozik örökké.

Megj. 3: A fenti tétel a nagy számok erős törvénye, mert az $\frac{S_n}{n} \to m$ konvergenciát erős értelemben, vagyis 1 valószínűséggel állítja.

Van olyan is, hogy „Nagy számok gyenge törvénye", ami szerint $\frac{S_n}{n} \to m$ „gyenge konvergencia értelemben". Ezt nem tárgyaljuk, mi csak az erős törvényt fogjuk használni.

Megj. 4: A bizonyítás nehéz, erős eszközökre épül $\Longrightarrow$ sokáig tartana $\Longrightarrow$ kihagyom.

Speciális eset: Legyen $A_1, A_2, A_3 \ldots$ teljesen független, azonos valószínűségű események sorozata, közös valószínűségük $p = \mathbb{P}(A_i)$ (minden i-re).

Legyen N_n az $A_1, A_2, \ldots A_n$ közül bekövetkező események száma (ami persze véletlen).

Ekkor $\frac{N_n}{n} \longrightarrow p$ 1 valószínűséggel (amint $n \to \infty$)

[Vagyis: ha n nagy, akkor gyakoriság $\approx$ valószínűség]

Biz.: Hát persze, $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha } A_i \text{ bekövetkezik} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$,

Így $X_i \sim B(p)$ függetlenek, $m := \mathbb{E}X_i = p$ és

$N_n = S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$, így a NSZET pont azt állítja, hogy $\frac{N_n}{n} \to p$

$\square$