Függetlenség

Emlékeztető: A és B események függetlenek, ha $\mathbb{P}(AB)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Ha kettőnél több esemény függetlenségéről van szó, kicsit jobban észnél kell lenni. Legyen most I indexhalmaz (akár végtelen is lehet), minden $i\in I$-re legyen $A_i\subset\Omega$ esemény.

<u>Def:</u> $\{A_i\}_{i\in I}$ események <u>páronként függetlenek</u>, ha $\forall i,j\in I$, $i\neq j$ esetén A_i és A_j független ~~(vagyis $\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$~~

(vagyis $\mathbb{P}(A_iA_j)=\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$)

<u>Def:</u> $\{A_i\}_{i\in I}$ események <u>teljesen függetlenek</u>, ha $\forall H\subset I$ <u>véges</u> index-halmazra $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in H} A_i\right)=\prod_{i\in H}\mathbb{P}(A_i)$

<u>Pl.</u> ahhoz, hogy $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ ~~függ~~ teljesen független legyen, szükséges, hogy $\mathbb{P}(A_1A_3A_7A_9)=\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(A_7)\mathbb{P}(A_9)$ legyen.

<u>Nyilvánvaló:</u> Ha $\{A_i\}_{i\in I}$ teljesen független, akkor páronként is.

<u>Fontos:</u> Fordítva <u>nem</u> igaz.

<u>Pl:</u> Kétszer dobunk egy szabályos érmével.

$A_1 := \{$Az első dobás fej$\}$

$A_2 :=$ ~~{Az első dobás fej}~~ $\{$A második dobás fej$\}$

$A_3 := \{$A két dobás egyforma$\}$.

Könnyen látható, hogy $\{A_1, A_2, A_3\}$ nem teljesen független (hát persze), viszont páronként független (ez kicsit meglepőbb).

Ugyanúgy definiálható valószínűségi változók páronkénti ill. teljes függetlensége (itt csak diszkrét val. változókra írom ki a definíciókat):

<u>Def:</u> $\{X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók <u>páronként függetlenek</u>, ha $\forall\, i,j \in I,\ i \neq j$ esetén X_i és X_j független

(vagyis $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$-re $\mathbb{P}(X_i=a, X_j=b) = \mathbb{P}(X_i=a)\,\mathbb{P}(X_j=b)$)

<u>Def:</u> $\{X_i\}_{i\in I}$ valószínűségi változók <u>teljesen függetlenek</u>, ha $\forall\, H \subset I$ véges halmazra és $\forall\, \{a_i\}_{i\in H}$ valós számokra

$$\mathbb{P}(\forall i \in H \ \ X_i = a_i) = \prod_{i\in H} \mathbb{P}(X_i = a_i)$$

<u>Észben tartandó példa:</u> Legyen $X_1, X_2 \sim B(\frac{1}{2})$ függetlenek, és legyen $X_3 = X_1 \text{ XOR } X_2$.

Ekkor $\{X_1, X_2, X_3\}$ páronként független, de teljesen nem.

<u>Megj:</u> Ebben a tárgyban szinte mindig a <u>teljes</u> függetlenség lesz a fontos fogalom.

Nevezetes diszkrét eloszlások

A rengeteg nevezetes diszkrét eloszlás közül nekünk csak néhány kell. Ezekben az a közös, hogy szorosan kapcsolódnak teljesen független érmedobások sorozatához.

Binomiális eloszlás

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$ paraméter.

Vegyünk egy hamis érmét, aminek a fej val.sége p.

Dobjuk fel n-szer teljesen függetlenül.

Legyen X a dobott fejek száma.

Def: Ekkor X binomiális eloszlású n, p paraméterekkel.

Jelölés: $X \sim Bin(n,p)$

Könnyű: X lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots, n$,

ezek val.ségei $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$,

ahol $q := 1-p$. Sok helyen ez a bin. eloszlás def-ja, de nekünk nem a képlet a fontos, hanem hogy milyen kísérletet modellez.

Spec. eset: Ha $n=1$, akkor visszakapjuk a Bernoulli eloszlást (lásd múlt óra): $Bin(1,p) = B(p)$

A fenti definícióból <u>nyilvánvaló</u>:

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n \sim B(p)$ teljesen függetlenek

és $X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, akkor $X \sim Bin(n,p)$

<u>Köv.</u>: Ha $X \sim Bin(n,p)$, akkor $\mathbb{E}X = np$, $Var\, X = npq$

[Vagyis X szórása $DX = \sqrt{Var\, X} = \sqrt{n}\sqrt{pq}$ arányos $\sqrt{n}$-nel.]

<u>Geometriai eloszlás</u>

Most is vegyünk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége $p \in [0,1]$. Dobáljuk ezt az érmét egymástól ~~ft~~ teljesen függetlenül addig, amíg fejet nem sikerül dobni.

Móricka és Pistike figyelik a kísérletet.

Móricka lelkesen várja az első fejet, és boldog, amikor végre megvan. Ezért, ami őt érdekli:

$X :=$ az első ~~fej~~ sikerhez (fejhez) szükséges dobások száma.

Pistike bánatosan várja, hogy mikor lesz már vége, és minden alkalommal szomorú, amikor nem sikerül fejet dobni.

Ezért ami őt érdekli:

$Y :=$ az első sikert (fejet) megelőző kudarcok (írások) száma.

Könnyű: X lehetséges értékei $1, 2, 3, \ldots$ $q := 1-p$ (5)

ezek val-ségei $\mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p$ $(k=1,2,\ldots)$

Y lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$

ezek val. ségei $\mathbb{P}(Y=k) = q^k p$ $(k=0,1,2,\ldots)$

A kettő közötti összefüggés persze: $X = Y+1$

Def: X eloszlását geometriai eloszlásnak, esetleg optimista geometriai eloszlásnak nevezzük:

$X \sim Geom(p)$

Y eloszlását pesszimista geometriai eloszlásnak nevezzük: $Y \sim Pessz\,Geom(p)$

Megj: A tárgyhoz való hivatalos jegyzet (tankönyv) nem használja az optimista/pesszimista szavakat, helyette azt mondja, hogy „geometriai eloszlás $\{1,2,3\ldots\}$-n”, illetve „geometriai eloszlás $\{0,1,2,\ldots\}$-n”.

Könnyű számolás:

$$E X = \frac{1}{p}$$ (hát persze: átlagosan hány dobás kell, hogy a dobókockán kijöjjön a 6-os?)

$$Var X = \frac{q}{p^2}, \quad DX = \sqrt{Var X} = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$$

Köv: $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$, $Var Y = Var X = \frac{q}{p^2}$, $DY = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$

Poisson eloszlás

Móricka derült éjjeleken hullócsillagokat számol. (6)
Este 10 és 12 között átlagosan 4-et szokott látni.

$X :=$ a legközelebbi derült éjjelen Móricka által este 10 és 12 között látott hullócsillagok száma.

Vajon mi lehet X eloszlása?

Modell (persze nagyon leegyszerűsítő)

Meteorok (űrben repülő kövek) próbálkoznak azzal, hogy a Föld légkörébe belépve elégjenek, pont este 10 és 12 között, pont Móricka szeme láttára. Az egyes meteorok egymástól teljesen függetlenül, azonos p val.széggel járnak sikerrel.

A próbálkozók száma legyen n, így $X \sim Bin(n, p)$.

Gond: Ez így számolásra nem alkalmas, mert sem n-et, sem p-t nem ismerjük, csak annyit tudunk, hogy

- n nagyon nagy (határ a csillagos ég)
- p nagyon kicsi
- $\mathbb{E}X = np = 4 =: \lambda$

Megoldás (tétel): Ha n nagy és p kicsi, akkor a $Bin(n,p)$ eloszlás jól közelíthető $Poi(\lambda)$ Poisson eloszlással, ahol $\lambda = np$.

Def: X val. változó eloszlása λ paraméterű Poisson eloszlás ahol $\lambda \in (0,\infty)$, ha X lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$ (határ a csillagos ég), és ezek valószínűségei

(7)

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Könnyű számolás: Ha $\lambda \in (0,\infty)$ rögzített és minden n-re $p_n = \frac{\lambda}{n}$, akkor minden rögzített $k \in \mathbb{N}$-re

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Bin}(n,p)=k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= \mathbb{P}(\mathrm{Poi}(\lambda)=k)$$

Vagyis ha n nagy és $p = \frac{\lambda}{n}$, akkor $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Megjegyzés: Ha n nagy és p kicsi, többnyire érdemes $\mathrm{Bin}(n,p)$-t $\mathrm{Poi}(np)$-vel közelíteni még akkor is, ha egyébként n és p ismert, mert a Poisson eloszlásnak szebb a képlete, és a közelítéssel elkövetett hiba úgyis eltörpül a durva modell felállításakor elkövetett közelítések és egyéb számolási hibák mellett. Sokszor azonban nincs is más választásunk, mint a Poisson közelítés, mert n és p külön-külön nem ismert.

<u>Számolás:</u> Ha $X \sim Poi(\lambda)$, akkor

$$\mathbb{E}X=\lambda, \quad Var\,X=\lambda, \quad DX=\sqrt{\lambda}$$

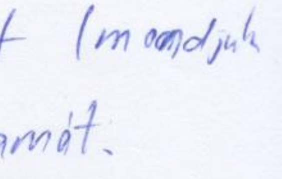
Folytonos valószínűségi változók

Két példa:

- Válasszunk egy pontot véletlenül a $[0,1]$ intervallumon, és nevezzük X-nek.
- Kapcsoljunk fel egy villanykörtét, várjunk addig amíg ki nem ég, és nevezzük Y-nak a közben eltelt időt (mondjuk órában mérve), vagyis a villanykörte élettartamát.

X-re és Y-ra is igaz, hogy a lehetséges értékek halmaza <u>nem</u> megszámlálható, cserébe minden lehetséges érték valószínűsége külön-külön <u>nulla</u>, így ezek felsorolásával nem sokra megyünk az eloszlás jellemzésekor.

Ilyenkor az eloszlást <u>sűrűségfüggvénnyel</u> jellemezhetjük.



<u>Heurisztikusan,</u> Az, hogy X sűrűségfüggvénye $f_X: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, azt jelenti, hogy minden $x\in\mathbb{R}$-re $\mathbb{P}(X=x)=0$, viszont $\varepsilon>0$-ra $\mathbb{P}(X\in(x,x+\varepsilon))$ már pozitív lehet, éspedig arányos ε-nal: $\mathbb{P}(X\in(x,x+\varepsilon))\approx\varepsilon\cdot f_X(x)$, ha ε kicsi.

Def: Az X valószínűségi változó <u>sűrűségfüggvénye</u>

~~Def~~: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, ha $\forall\, a<b \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbb{P}(a<X<b)$

$$\mathbb{P}\big(X \in (a,b)\big) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nyilvánvaló, hogy a <u>diszkrét</u> val. változóknak <u>nincs</u> sűrűségfüggvénye. Ellenben minden olyan val. változónak, ami nem diszkrét <u>és</u> számunkra érdekes, van.

Def: Az X valószínűségi változó <u>abszolút folytonos</u>, ha van sűrűségfüggvénye.

<u>Tulajdonságok:</u> $f(x) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ (hát persze).

<u>Felhasználás:</u> $\mathbb{P}(a<X<b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

<u>Abszolút folytonos val. változók várható értéke</u>

Def: Ha X sűrűségfüggvénye f, akkor a várható értéke

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$$

~~Megj:~~

Megj: Ez az $\mathbb{E}X$ ugyanaz a súlyozott átlag, mint a diszkrét esetben:

lehetséges érték, súly, „összeadás”

$$\mathbb{E}X = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx}{1} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}$$

„súlyok összege”

Eloszlásfüggvény

Def: X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F: \mathbb{R} \to [0,1]$,

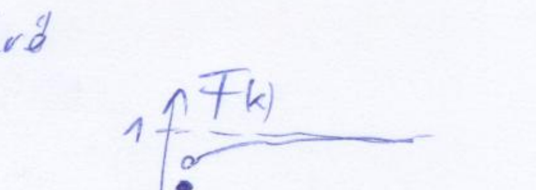
amire $F(x) := \mathbb{P}(X < x)$ (oroszos definíció)

$\mathbb{P}(X \leq x)$ (angolszász definíció).

[Ha X abszolút folytonos, akkor mindegy, hogy az oroszos vagy angolszász definíciót vesszük. Ha pedig X diszkrét, akkor az eloszlásfüggvényt ritkán használjuk bármire is.]

Tulajdonságok:

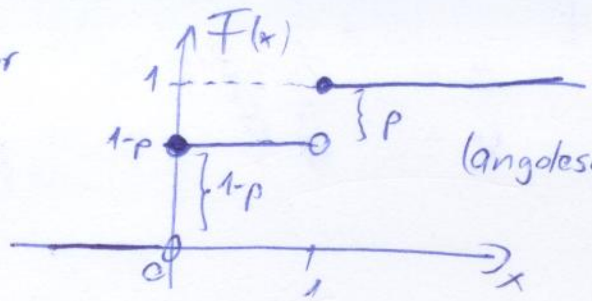
- X monoton növekvő
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$



oroszosan definiált eloszlásfüggvény

- F balról folytonos (ha oroszosan definiáljuk)
  jobbról folytonos (ha angolosan definiáljuk)
- Ha X abszt. folytonos, akkor F folytonos.

Pl: Ha $X \sim B(p)$, akkor



(angolosan definiálva)

Alkalmazás:

- Ha X abszolút folytonos, akkor

$$\mathbb{P}(a<X<b)=\mathbb{P}(a\le X\le b)=\mathbb{P}(a\le X<b)=\mathbb{P}(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

- És általában is

$$\mathbb{P}(a\le X<b)=F(b)-F(a) \quad \text{(oroszosan)}$$

$$\mathbb{P}(a<X\le b)=F(b)-F(a) \quad \text{(angolosan)},$$

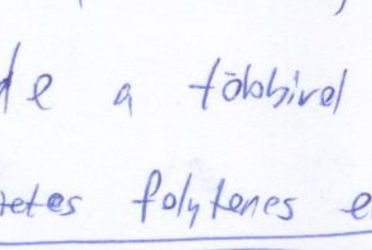
de a többivel jobban észnél kell lenni.

Nevezetes folytonos eloszlások

Sok van, de nekünk csak néhány fog kelleni:

Folytonos egyenletes eloszlás: Legyen $a<b \in \mathbb{R}$

Def: X egyenletes eloszlású az $[a,b]$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye $f(x)=\begin{cases} \text{const}, & \text{ha } a<x<b \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

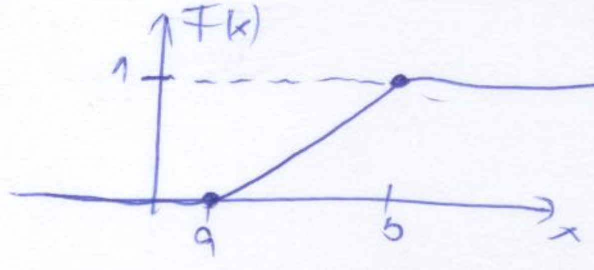


Jelölés: $X \sim Uni([a,b]) = E([a,b])$

~~Tulajdonságok~~

Tulajdonságok:

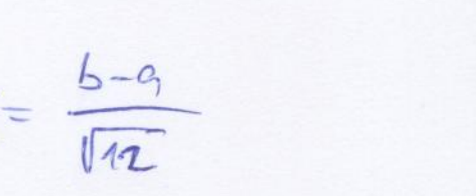
- Persze $\text{const} = \frac{1}{b-a}$, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ legyen
- eloszlásfüggvénye



- $\mathbb{E}X = \frac{a+b}{2}$
- $\text{Var}\,X \xlongequal[\text{számolás}]{\text{könnyű}} \frac{(b-a)^2}{12}$, $DX = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$

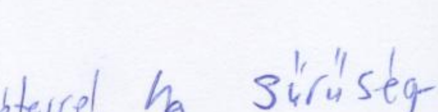
<u>Exponenciális eloszlás</u> Legyen $\lambda > 0$.

<u>Def:</u> X exponenciális eloszlású λ paraméterrel, ha sűrűségfüggvénye $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$



Tulajdonságok:

- eloszlásfüggvénye $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$



- $\mathbb{E}X = \frac{1}{\lambda}$
- $\text{Var}\,X = \frac{1}{\lambda^2}$, $DX = \frac{1}{\lambda}$ (érdemes összehasonlítani a $\text{Poi}(\lambda)$ eloszlással)
- <u>örökifjúság</u>: $\boxed{\text{nagyon fontos!}}$

Tétel (exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága) (13)

Ha $X \sim Exp(\lambda)$, $t, s > 0$, akkor

$$\underbrace{\mathbb{P}(X > t+s}_{\substack{\text{még } s \\ \text{időt kibír}}} \mid \underbrace{X > t}_{\substack{t\text{-ig} \\ \text{kibírta}}}) = \mathbb{P}(\underbrace{X > s}_{\substack{s \text{ időt kibír} \\ \text{újkorától számítva}}})$$

Megj: Az exponenciális eloszlás az egyetlen (folytonos) örökifjú eloszlás. Ezért használjuk sokszor élettartamok modellezésére, ha valami kütyü nem azért romlik el, mert elkopik/öregszik, hanem mert valami váratlan hatás tönkreteszi.

Pl: • villanykörte élettartama
• telefonközpontban az első hívásig eltelt idő (mondjuk déltől)
• radioaktív atommag élettartama

Pl: A C^{14} atommag élettartama exponenciális eloszlású. Ez azt jelenti, hogy ha bemegyek az izotóp-boltba, és kérek egy vadonatúj C^{14} atommagot, de átvernek, és rám sóznak egy használtat, ami már 1000 éves, akkor nem jártam rosszul, mert az 1000 éves atommag új szerű állapotban van, feltéve, hogy még nem bomlott el.

Gamma eloszlás

Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ teljesen független $\sim Exp(\lambda)$,

és legyen $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Ekkor Y Gamma eloszlású (n, λ) paraméterekkel.

[Megjegyzés / figyelmeztetés: A gamma eloszlást sok féleképpen szokták máshogy is paraméterezni]

Jelölés: $Y \sim \Gamma(n, \lambda)$

Pl: Telefonközpontban az n-edik bejövő hívásig eltelt idő.

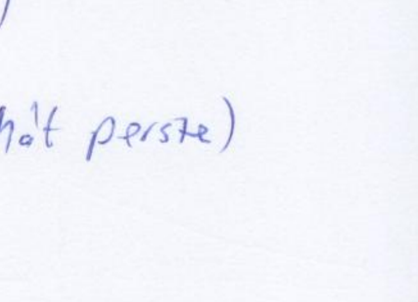
Tulajdonságok: $\mathbb{E}Y = \frac{n}{\lambda}$ (hát persze)

$$Var\, Y = \frac{n}{\lambda^2}, \quad DY = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \quad \text{(hát persze)}$$

Tétel (nem bizonyítjuk, bár nem nehéz):

$Y \sim \Gamma(n, \lambda)$ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$



[Megj: A ~~[illegible]~~ definíció általánosítható nem feltétlenül egész $s \in \mathbb{R}^+$-ra is: $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

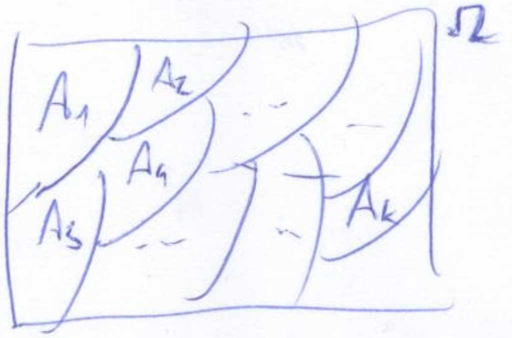
ahol Γ az Euler féle gamma-fv. Innen jön az eloszlás neve, de nekünk csak egész s-re kell.]

Teljes valószínűség tétel

Def: $A_1, A_2, A_3 ---$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha mindig pontosan 1 következik be közülük,

vagyis $A_i \cap A_j = \emptyset$ minden $i \neq j$-re

és $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ a biztos esemény:



P1: feldobunk egy dobókockát, $A_k := \{$ a dobott szám $k \}$

$$k = 1, 2, --, 6.$$

Sokszor előfordul, hogy egy B esemény feltételes val. ségeit könnyebb kiszámolni, mint a teljes val. ségét.

P1: ~~Legyen~~ Miután feldobtuk a kockát, dobjunk fel annyi érmét, amennyi a kockadobás eredménye, és $B := \{$ egyetlen fejet sem dobunk $\}$.

Ekkor $P(B)$ nem nyilvánvaló, viszont

$$\mathbb{P}(B | A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ könnyű minden } k\text{-ra.}$$

Kérdés: Hogy jön ki ezekből $\mathbb{P}(B)$?

Tétel (teljes valószínűség tétele)

Ha $A_1, A_2 \ldots$ teljes eseményrendszer és B esemény,

akkor $$\mathbb{P}(B) = \sum_k \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)$$

Biz: Hát persze: $B = \dot{\bigcup_k} (A_k \cap B)$ ezért $\mathbb{P}(B) = \sum_k \mathbb{P}(A_k \cap B)$,

de a feltételes valószínűség definíciójából

$$\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}(B|A_k)$$

$\square$

Megj.: Ha van olyan k, amire $\mathbb{P}(A_k)=0$, akkor $\mathbb{P}(B|A_k)$ nem létezik, de sebaj, mert úgyis 0-val kell megszorozni. Legyen ezért konvenció szerint

$$0 \cdot (\text{undefined}) \overset{\text{def}}{=} 0$$

Pl: A fenti esetben, ha a kocka szabályos, akkor

$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{6}$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$, ezért

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

Teljes várható érték tétel

Ha $\mathbb{P}(A) > 0$, és X val. változó, akkor értelmes X feltételes eloszlása A feltétel mellett, pl. diszkrét X esetén a $\mathbb{P}(X = x_k \mid A)$ feltételes val. sz-ek írják le.

Ezekből definiálható az $\mathbb{E}(X \mid A)$ feltételes várható érték, ahogy Móricka gondolná — itt nem részletezzük.

Tétel (teljes várható érték tétel)

Ha $A_1, A_2, A_3 \ldots$ teljes eseményrendszer és X val. változó (és $\mathbb{E}X$ létezik), akkor

$$\mathbb{E}X = \sum_k \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{E}(X \mid A_k)$$

(és $\mathbb{E}(X \mid A_k)$ létezik minden olyan k-ra, amire $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$).

Pl: Ha a fenti példában X a dobott fejek száma, akkor $\mathbb{E}(X \mid A_k) = \frac{k}{2}$, így

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{2} + \ldots + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{2} = \frac{7}{4}.$$

Megj: Ennek a tételnek egy folytonos változatát is fogjuk használni — lásd majd később.