Laplace-transzformáció

<u>Def</u>: Egy $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ függvény <u>Laplace-transz-formáltja</u> az L_f függvény, ahol

$$L_f(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx,$$

már amelyik s-re ez létezik.

[Igazából $L_f: D\to\mathbb{R}$, ahol $D=\{s\in\mathbb{R} : L_f(s) \text{ értelmes}\}$

Sőt kemény csávóknak

$L_f: D\to\mathbb{C}$, ahol $D=\{s\in\mathbb{C} : L_f(s) \text{ értelmes}\}$]

[<u>Megj</u>: Ez az <u>1 oldali</u> Laplace-transzformáció: $\int_{\boxed{0}}^{\infty}\dots$

Van 2-oldali is, de nekünk nem kell.]

Mi ezt val.változók eloszlásának megértésére szeretnénk használni:

<u>Def</u>: Ha az $X\in[0,\infty)$ val.változó sűrűségfüggvénye $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, akkor <u>$X$ Laplace-transzformáltja</u> legyen f Laplace-transzformáltja:

$$L_X(s)=L_f(s)=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx=\mathbb{E}\left(e^{-sX}\right).$$

Ezen felbuzdulva: nem is kell, hogy X folytonos legyen:

Def: Egy tetszőleges X ~~val. változó~~ $\in \mathbb{R}$ val. változó Laplace-transzformáltja ~~legyen~~ L_X, ahol

$$L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}).$$

Fő hiro: Ha $X \geq 0$, akkor $L_X(s)$ létezik minden

$s \in [0, \infty)$-re, mert $0 \leq e^{-sX} \leq 1$,

és ez nekünk elég is: mi mindig csak az

$X \geq 0$, $s \geq 0$ esetet fogjuk használni.

Spec: Ha $X \in \mathbb{N}$, akkor ~~ha~~ X-nek van generátorfüggvénye is, és $z \longleftrightarrow e^{-s}$ helyettesítéssel

$$\boxed{L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) = \mathbb{E}(z^X) = g_X(z) = g_X(e^{-s})}$$

$$\boxed{g_X(z) = L_X(-\ln z)}$$

A két fv. ugyanaz átskálázva: $z = 0 \longleftrightarrow s = \infty$
$z = 1 \longleftrightarrow s = 0$

[Megj: Általában, ha $X \geq 0$ nem teljesül, a létezéssel lehet gond.]

[Megj: $M(s) := \mathbb{E}(e^{sX}) = L_X(-s)$ az X momentum-generáló függvénye]

Jó hír 1: Ha az X, Y val. változókra $L_X = L_Y$, akkor X és Y azonos eloszlású, vagyis a Laplace-transzformált karakterizálja az eloszlást

||

teljes információt hordoz az eloszlásról

avagy rekonstruálható belőle az eloszlás.

Rossz hír: Általában L_X-ből az eloszlás rekonstruálása nehéz: az inverz Laplace-transzformáció képletét fel se merem írni, de ha valakinek nagyon kell, utánanézhet, és legrosszabb esetben numerikusan számolhatja.

Vigasz: Ha szembejön egy ismerős eloszlás Laplace-transzformáltja, majd ráismerünk.

Tulajdonságok

0.) Létezés: $X \geq 0$ $s \geq 0$-ra $L_X(s)$ létezik – ez már volt.

1.) Egyértelműség: ez is volt

2.) Regularitás: Ha $X \geq 0$, akkor L_X ~~folytonos $[0,\infty)$-en~~,

- folytonos $[0,\infty)$-en
- akárhányszor deriválható $(0,\infty)$-en
- 0-ban is léteznek az ~~egy~~ 1-oldali deriváltak (bár lehetnek $\pm\infty$-ek)

3) Momentumok, deriváltak: $X \geq 0$-ra

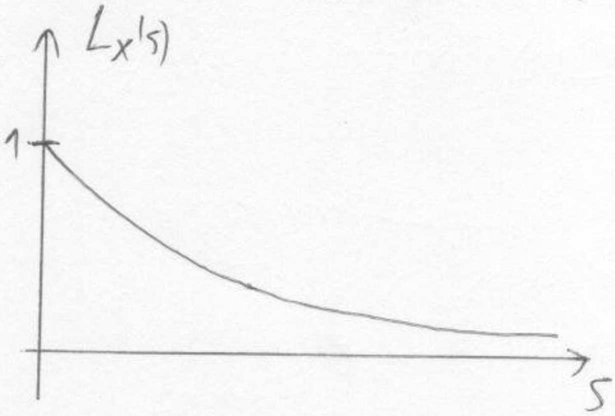
$$\left.\begin{array}{ll} L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) & \Rightarrow L_X(0) = 1 \\ L_X'(s) = \mathbb{E}(-X e^{-sX}) & \Rightarrow L_X'(0) = -\mathbb{E}X \\ L_X''(s) = \mathbb{E}(X^2 e^{-sX}) & \Rightarrow L_X''(0) = \mathbb{E}(X^2) \end{array}\right\} \boxed{\text{Ez kell}}$$

$$\vdots$$

$$L_X^{(k)}(0) = (-1)^k\, \mathbb{E}(X^k)$$

$\Downarrow$

Ha $X \geq 0$, akkor $[0,\infty)$-en L_X szig. mon. csökkenő és szig. konvex, (kivéve, ha $X \equiv 0$):



~~Ezek~~ Ezek nekünk nem kellenek, de jó tudni.

[Összehasonlításul: Az $M(s) := \mathbb{E}(e^{sX})$ momentum-generáló fv-re $M'(0) = \mathbb{E}X$, $M''(0) = \mathbb{E}(X^2)$, ... $M^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$.

~~Cserébe nem biz $X \geq 0$-ra nem biztos, hogy~~

Cserébe $X \geq 0$, $s \geq 0$-ra nem biztos, hogy $M(s)$ létezik.]

4.) Konvolúció

Tétel: Ha X és Y független val. változók, akkor

$$L_{X+Y} = L_X L_Y$$

Biz: $L_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left(e^{-s(X+Y)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-sX} e^{-sY}\right) \overset{\text{függet-}}{\underset{\text{lenség}}{=}} \mathbb{E}\left(e^{-sX}\right)\mathbb{E}\left(e^{-sY}\right)$ $\square$

Vagyis a Laplace-transzformáció a konvolúcióból szorzást csinál (épp úgy, mint testvérei, a generátorfüggvény és a Fourier-transzformáció).

Példák

1.) Ha $X \equiv 0$, akkor $L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sX}) = 1$.

2.) Ha $X \equiv c \in \mathbb{R}$, akkor $L_X(s) = \mathbb{E}(e^{-sc}) = e^{-sc}$

3.) Az összes kedvenc diszkrét ~~ka~~ eloszlásunkra (Bernoulli, binomiális, geometriai, Poisson, egyenletes) ~~Ax~~ $L_X(s) = g_X(e^{-s})$, ezek nem túl izgalmasak.

4.) Ha $X \sim Exp(\lambda)$, akkor

$$\boxed{L_X(s)} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-sx}\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-(\lambda+s)x}}{-(\lambda+s)}\right]_{x=0}^{\infty}$$

$$= \boxed{\frac{\lambda}{\lambda+s}}$$

(minden $s \geq 0$-ra értelmes, hát persze, hiszen...)

Van rengeteg alkalmazás, de mi 2 dologra fogjuk használni:

1) Véletlen tagszámú összeg ~~folytonos~~ nem feltétlenül diszkrét tagokkal.

Tétel (Véletlen tagszámú összeg Laplace-transzformáltja).

Legyen $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ ahol

$X_1, X_2, X_3 \ldots \in \mathbb{R}^+$ azonos eloszlású
$N \in \mathbb{N}$ is véletlen
} teljesen függetlenek.

Ekkor S_N Laplace-transzformáltja

$L_{S_N}(s) = g_N(L_X(s))$, ahol

L_X az X_i-k közös Laplace-transzformáltja

g_N az N generátorfüggvénye.

Biz: Pont, mint a diszkrét esetben - a generátorfüggvényre - nem írom le.

Pl: Exponenciális eloszlás ritkítása:

Ha $N \sim Geom(p) \Rightarrow g_N(z) = \dfrac{pz}{1-(1-p)z}$

$X_1, X_2 \ldots \sim Exp(\lambda) \Rightarrow L_X(s) = \dfrac{\lambda}{\lambda+s}$

akkor $L_{S_N}(s) = \dfrac{p\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p)\frac{\lambda}{\lambda+s}} = \dfrac{p\lambda}{\lambda+s-\lambda+\lambda p} = \dfrac{p\lambda}{p\lambda+s} \Rightarrow S_N \sim Exp(p\lambda)$

(2) Poisson-folyamat eseményszáma véletlen idő alatt

7/9

Pistike telefonos ügyfélszolgálaton dolgozik, ahová a hívások λ intenzitású Poisson-folyamat szerint érkeznek.

Pistike a munkából T ~~időt~~ időt késik, ahol $T \geq 0$ véletlen. Hány hívásról marad le?

Pontosabban: Legyen X az elszalasztott hívások száma, mi X eloszlása?

Válasz: Az $N(t)$ Poisson-folyamat éppen a hívások száma t-ig (legyen $N(0)=0$), így $X = N(T)$ ← véletlen időben!

↑ véletlen folyamat

ennek kell az eloszlása.

Tétel (Poi-folyamat eloszlása véletlen időben)

Legyen $N(t)$ Poisson-folyamat λ intenzitással és $T \geq 0$ ~~függ~~ véletlen és független $N(t)$-től.

Ekkor $X := N(T)$ generátorfüggvénye

$$\boxed{g_X(z) = g_{N(T)}(z) = L_T(\lambda(1-z))},$$

ahol L_T a T Laplace-transzformáltja.

8/9

Biz: A tétel teljes általánosságban igaz, de én csak arra az esetre bizonyítom, amikor T folytonos f sűrűségfüggvénnyel (és egy kicsit csalok is).

$$g_{N(T)}(z) = \mathbb{E}\left(z^{N(T)}\right) \xlongequal[\text{amit a folytonos esetben ki se mondtam, de mindenki elhiszi}]{\text{teljes várható érték tétel,}}$$

$$\xlongequal[\text{függvénye } f]{T \text{ sűrűség-}} \int_0^\infty f(x) \underbrace{\mathbb{E}\left(z^{N(T)} \mid T=x\right)}_{\text{A } T=x \text{ feltétel mellett}} dx$$

$$N(T) = N(x) \sim Poi(\lambda x)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(z^{N(T)} \mid T=x\right) = g_{Poi(\lambda x)}(z) = e^{\lambda x(z-1)}$$

$$= \int_0^\infty f(x)\, e^{\lambda x(z-1)}\, dx = \int_0^\infty f(x)\, e^{-[\lambda(1-z)]x}\, dx$$

$$= L_T(\lambda(1-z)) \qquad \square$$

Spec: Ha $T \sim Exp(\mu)$, akkor $L_T(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$,

így

$$g_{N(T)}(z) = L_T(\lambda(1-z)) = \frac{\mu}{\mu+\lambda(1-z)} = \frac{\mu}{\mu+\lambda-\lambda z} =$$

$$= \frac{\frac{\mu}{\mu+\lambda}}{1-\frac{\lambda}{\mu+\lambda}z} \xlongequal{p:=\frac{\mu}{\mu+\lambda}} \frac{p}{1-(1-p)z}$$

amiből $N(T) \sim \text{PessGeom}(p) = \text{PessGeom}\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$.

9/9

Megj: Hát persze: Nézzünk egy ügyfélszolgálatot, ahol
λ intenzitással jönnek a felháborodott ügyfelek hívásai } függet-
μ — // — az elégedett — // —
len Poi-folyamatok szerint.

$T :=$ az első elégedett ügyfél hívása (első siker) időpontja
$N(t) :=$ az elégedetlen hívások (kudarcok) Poi-folyamata
$X := N(T)$ a kudarcok száma az első siker előtt.

Ahogy a hívások 1-esével befutnak, mindegyik az előzményektől
függetlenül $p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$ val.séggel siker (elégedett) } $\Rightarrow$
$1-p = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$ ~ kudarc (elégedetlen)

$\Rightarrow X \sim \text{PesszGeom}(p)$