Generátorfüggvény-módszer

Def: Egy $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ számsorozat generátorfüggvénye

a $g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ függvény.

Magyarul: a sorozat alapján készítünk egy hatványsort, amiknek együtthatói éppen a sorozat elemei.

Ez a sor általában bizonyos z-kre konvergens, másokra nem, ezért pontosítás

Def: Egy $a_0, a_1, a_2 \ldots \in \mathbb{R}$ számsorozat generátorfüggvénye

a $g : D \to \mathbb{R}$, $\quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ függvény,

ahol $D \subset \mathbb{R}$ a hatványsor konvergenciatartománya.

Analízisből tudjuk, hogy D mindig intervallum, ráadásul a 0 körül szimmetrikus (eltekintve esetleg a végpontoktól):

$D = (-r, r)$ vagy esetleg $[-r, r)$ vagy $(-r, r]$ vagy $[-r, r]$,

ahol $r \in [0, \infty]$ a konvergenciasugár (lehet ∞ is).

Analízisből tudjuk azt is, hogy ha $r > 0$, akkor D belsejében, vagyis $(-r, r)$-en g gyönyörűen viselkedik: folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, sőt lehet tagonként deriválni. SŐT:

A generátorfüggvény egyik leghasznosabb tulajdonsága, hogy ha $r>0$ (vagyis tényleg van függvény), akkor az a_k sorozat <u>rekonstruálható</u> $g(z)$-ből:

$$a_0 = g(0) \qquad a_3 = \frac{g'''(0)}{6}$$
$$a_1 = g'(0) \qquad \vdots$$
$$a_2 = \frac{g''(0)}{2} \qquad a_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$$

k-adik derivált.

Ez persze nem más, mint a g függvény Taylor sorfejtése.

<u>Lényeg</u>: (a_k) és $g(z)$ <u>ugyanazt az információt</u> hordozza: ha az egyiket ismerjük, az pont olyan jó, mint ha a másikat.

Legyen most X valószínűségi változó $\boxed{\text{nemnegatív}}$, $\boxed{\text{egész értékű}}$: röviden $X \in \mathbb{N}$. Ekkor az X eloszlása lényegében egy $p_0, p_1, p_2, p_3 \ldots$ számsorozat: $p_k := \mathbb{P}(X=k)$.

Ezért <u>Def</u>:

Az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g_X(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k$$

, vagyis a $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ sorozat generátorfüggvénye.

Fontos:

1. Generátorfüggvénye csak $\boxed{\text{nemnegatív}}$, $\boxed{\text{egész értékű}}$ val. változónak van, a többinek nincs.
2. Az értelmezési tartományon nem kell aggódni: $r \geq 1$ biztosan teljesül, mert $g(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) 1^k = 1$, ~~vagyis lég~~ (amiből következik, hogy $g(-1)$ is létezik), vagyis $g_X(z)$ legrosszabb esetben $z \in [-1,1]$-re értelmes. Nekünk csak $z \in [0,1]$-re fog kelleni.

Tulajdonságok:

0.) g_X meghatározza az eloszlást: $\mathbb{P}(X=k) = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ (ez már volt)

1.) $g_X(1) = 1$ – vagyis $g_X(1)$ értéke nem hordoz információt, de ellenőrzésre használható

2.) a) $g_X'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$,

amiből $\boxed{g_X'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbb{E}X}$

b.) $g_X''(z) = 2p_2 + 6p_3 z + 12 p_4 z^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2}$,

amiből $g_X''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = \mathbb{E}\left[X(X-1)\right] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X$.

Ezekből $\boxed{\mathrm{Var}\,X = E(X^2) - (EX)^2 = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2}$

Megjegyzés: (p_k) és $g(z)$ ugyanazt az információt hordozza, de az oda-vissza áttérés általában macerás: sort felösszegezni / ~~fat~~ függvényt sorba fejteni általában nehéz.

Ha $\mathbb{P}(X \leq 100)$ valószínűség érdekel, akkor a generátor-függvény nem túl kényelmes: százszor kell lederiválni (ha jobb ötletünk nincs a sorfejtésre).

Ha viszont $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Var}\,X$ érdekel, akkor $g(z)$ még jobb is, mint az eloszlás: deriválni könnyebb, mint végtelen összegeket számolni.

3.) $g_X(0) = p_0 = \mathbb{P}(X=0)$ (Ennél fontosabb kérdés ritkán van egy $\mathbb{N}$-értékű val. változóval kapcsolatban, ami többnyire darabszám.)

4.) $g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) z^k = \mathbb{E}(z^X)$, ez szép és hasznos.

5.) Tétel: Legyen X és Y $\boxed{\text{független}}$ nemnegatív egész értékű val. változó, $Z = X+Y$. Ekkor

$$g_Z(z) = g_X(z)\, g_Y(z).$$

Biz.: $g_Z(z) = \mathbb{E}(z^Z) = \mathbb{E}(z^{X+Y}) = \mathbb{E}(z^X \cdot z^Y) \overset{\text{függetlenség}}{=} \mathbb{E}(z^X)\,\mathbb{E}(z^Y)$ $\square$

Megj: Ha X elosztása $a_0, a_1, a_2 \dots$
Y elosztása $b_0, b_1, b_2 \dots$ } , X és Y független

$Z = X + Y$ elosztása $c_0, c_1, c_2, \dots$

akkor $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$, amit úgy hívunk, hogy

$c = a * b$, a két sorozat konvolúciója.

Általában igaz, hogy két sorozat konvolúciójának generátorfüggvénye a generátorfüggvények szorzata.

Ez már nyomós ok arra, hogy a generátorfüggvényt szeressük: konvolúciót számolni nehéz, szorozni könnyű.

Megj: Vannak más transzformációk is, amik konvolúcióból szorzást csinálnak, és ezért szeretjük őket:

- Fourier transzformáció — val. számos neve karakterisztikus függvény
- Laplace-transzformáció — val. számos neve momentumgeneráló függvény.

Az, hogy mi most mégis a generátorfüggvényt tanuljuk, az a következő fogalom + tétel miatt van.

<u>Def:</u> Legyen $X_1, X_2, X_3 \ldots \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású.
↖ fontos!

Legyen $N \in \mathbb{N}$ szintén egy valószínűségi változó, független az X_k-tól

Legyen $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ VÉLETLEN!!

Ekkor S_N-et <u>véletlen tagszámú összeg</u>nek nevezzük.

[Konvenció: Ha $N=0$, akkor $S_N=0$ (üres összeg)]

[Vagyis mostantól, ha azt mondom, hogy „Véletlen tagszámú összeg", akkor abba beleértem, hogy $X_1, X_2 \ldots \in \mathbb{N}$ független és azonos eloszlású és független N-től is.]

6.) <u>Tétel</u> Legyen $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ véletlen tagszámú összeg.

Legyen az $X_1, X_2 \ldots$ közös generátorfüggvénye g_X

N ~ g_N

S_N ~ g_{S_N}.

Ekkor $g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z))$.

Más szóval $g_{S_N} = g_N \circ g_X$ függvény-kompozíció.

Biz: A teljes várható érték tétel miatt

$$g_{S_N}(z) \underset{\text{4.) tul.}}{=} \mathbb{E}(z^{S_N}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}(z^{S_N} \mid N=n) \;\overset{\text{ha } N=n,}{\underset{\text{akkor } S_N = S_n}{=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}(z^{S_n} \mid N=n) = \cancel{\sum_{n=0}^{b} \mathbb{P}(S_n=n)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}(z^{X_1+X_2+\dots+X_n} \mid N=n) \;\overset{X_1,\dots X_n \text{ független}}{\underset{N\text{-től!!}}{=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, \mathbb{E}(z^{X_1+\dots+X_n} \cancel{\mid N=n}) \;\overset{\text{5.) tulajdonság,}}{\underset{X_1, X_2 \dots \text{ f.a.eo!}}{=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \left[g_X(z)\right]^n \;\overset{y := g_X(z)}{\underset{\text{ideiglenes jelölés}}{=\!=\!=}} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n)\, y^n =$$

$$\overset{\text{a generátorfv.}}{\underset{\text{definíciója}}{=\!=\!=}} g_N(y) = g_N(g_X(z)) \qquad \square$$

Példák:

1) Ha $X \sim B(p)$, vagyis

k	0	1	egyéb
$P(X=k)$	$1-p$	p	0

akkor $g_X(z) = (1-p)\cdot z^0 + p z^1 = (1-p) + pz$

2) Ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim B(p)$ független és $X = \xi_1 + \dots + \xi_n$,

akkor ~~$X \sim B(p)$~~ $X \sim Bin(n,p)$ és $g_X(z) \underset{\text{5) tétel}}{=} \left[g_\xi(z)\right]^n = \left((1-p)+pz\right)^n$.

[Ez persze kijön közvetlenül is:

$$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)z^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(pz)^k(1-p)^{n-k} \underset{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}}{\overset{\text{binomiális tétel}}{=\!=}} (pz+1-p)^n.$$
]

3.) Ha ~~X≡~~ $X \equiv 0$, akkor $\mathbb{P}(X=0)=1$,

vagyis $g_X(z)=1\cdot z^0=1$.

[Persze ilyenkor $X\sim B(0)$, és ebből is: $g_X(z)=(1-0)+0\cdot z=1$]

4.) Ha $X\equiv 1$, akkor $\mathbb{P}(X=1)=1$, vagyis $g_X(z)=z$

[Avagy: $X\sim B(1)$, és ebből $g_X(z)=(1-1)+1\cdot z=z$]

5.) Ha $X\sim \text{PesszGeom}(p)$, vagyis $\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^k$ $k=\underline{\underline{0}},1,2,\dots$

akkor $$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = p\sum_{k=0}^{\infty}\left[(1-p)z\right]^k \overset{\text{mértani sor}}{=} p\,\frac{1}{1-(1-p)z}$$

$$=\frac{p}{1-(1-p)z}$$

6.) Ha $X\sim \text{PesszGeom}(p)$, $Y=1$ és $Z=X+Y$, akkor

$Z\sim \text{Geom}(p)$ (erre, remélem, mindenki emlékszik), és az 5.) tulajdonság miatt

$$\boxed{g_Z(z) = g_Y(z)\, g_X(z) = z\, \frac{p}{1-(1-p)z} = \frac{pz}{1-(1-p)z}}$$

Hát persze: $Y=1$ determinisztikus, így bármelyik val. változótól független.

[Általában: $g_{X+k}(z) = z^k g_X(z)$, ha $k \in \mathbb{N}$ determinisztikus.
Ez annak felel meg, hogy a sorozat $\boxed{\text{eltolása}}$ 1-gyel jobbra (úgy, hogy balról a 0. helyre bejön egy nulla) megfelel a generátorfüggvény z-vel való szorzásának.]

7.) Ha $X \sim Poi(\lambda)$, akkor $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,2,\ldots$,

ezért $g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} z^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} =$

$= \underline{\underline{e^{\lambda(z-1)}}}$

Emlékezzünk:
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

A Poisson doszlás ritkítása

Egy pók által ~~rakott~~ peték száma Poisson eloszlású, a várható értéke 20. Minden pete $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kel ki, függetlenül egymástól – és attól is, hogy hányan vannak. Mi a kikelt peték számának eloszlása?

$\boxed{\lambda = 20}$

Jelölések: Legyen $N \sim Poi(\lambda)$ a lerakott peték száma, ~~...~~

Legyen $X_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha az első pete kikel} \leftarrow \text{ennek val.sége } 1/2 \\ 0, & \text{ha nem} \leftarrow \text{ennek is} \end{cases}$

$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha a második pete kikel} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

$\vdots$

$X_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik pete kikel} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Legyen Y a kikelt peték száma.

A szöveg feltevései szerint $X_k \sim B(p)$ függetlenek, $\boxed{p = \frac{1}{2}}$,

és $X_1, X_2 \ldots$ független N-től is, és persze

$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k \quad , \text{ ami véletlen tagszámú összeg.}$$

Számoljuk ki a generátorfüggvényt: $q := 1-p$ jelöléssel

11/12

$$g_X(z) = q + pz \quad , \quad g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$$

Így a 6. oldal 6.) tétel miatt

$$g_Y(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda([q+pz]-1)}$$

Na, ez vajon milyen eloszlás generátorfüggvénye lehet?

Ehhez $g_Y(z) = e^{\lambda(pz+1-p-1)} = e^{\lambda p(z-1)} = e^{\mu(z-1)}$

ahol $\boxed{\mu = \lambda p = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10.}$

Ezt nem kell sorbafejteni, mert ~~régi~~ friss ismerősünk:

~~$Y \sim Poi(\mu)$, hiszen a karakterisztikus függvény~~

$$\boxed{Y \sim Poi(\mu)}$$

Megjegyzés: Az, hogy $EY = 10$, elég nyilvánvaló. Az, hogy Poisson eloszlású, intuitíve sokkal világosabb lett volna, ha pókpete helyett hullócsillagokról beszélek:

Móricka egy $\boxed{\text{derült}}$ augusztusi éjjelen ~~között~~ ~~átlagosa~~ 11:00 és 05:00 között átlagosan 20 hullócsillagot szokott látni. (A fölbv elejéről tudjuk, hogy a számuk Poi(20) eloszlású.)

Igen ám, de pont Aug. 20-án éjjel részben felhős az ég, és a felhők minden hullócsillaget (ami pedig jókor hullik jó helyen) 1/2 val.séggel eltakarnak (a többitől függetlenül). Mi lesz a Móricka által mégis látott HCS-k számának eloszlása?

12/12

Hát persze, hogy Poisson: továbbra is

- sok kő próbálkozik azzal, hogy jókor jó helyen égjen el
- a siker-valószínűség külön-külön nagyon kicsi lenne derült időben is
- csak egy ráadás nehézség, hogy a felhő takarását is el kell kerülni

~~A~~ A sikeres próbálkozók száma ilyenkor Poisson eloszlású.