Foster kritérium

könnyen ellenőrizhető elégséges feltétel végtelen állapotterű Markov láncok stabilitására

Legyen $X_n \in \mathbb{N}$ (nemnegatív, egész értékű) Markov lánc.

[X_n jelentése lehet pl. darabszám vagy hely.]

Tfh X_n ~~olyan, hogy~~ időfejlődése olyan, hogy

- Ha X_n kicsi (mondjuk $< 10^6$), akkor történhet bármi (de azért a várható érték ne legyen egyből ∞)
- Ha viszont X_n nagy, akkor kénytelen csökkenni — — legalábbis várható értékben.

Ekkor X_n nem tud elszállni a ∞-be.

Ha még a stabilitás két „beugró feltétel"-e is teljesül (vagyis X_n irreducibilis és aperiodikus), akkor X_n stabil.

[Megj: nem baj, ha a Markov lánc állapotai nem „maguktól" számok. Az is elég, ha meg tudjuk őket ügyesen sorszámozni.]

Ugyanez formálisan:

Tétel (Foster kritérium)

Legyen X_n időben homogén, irreducibilis Markov lánc az $S = \mathbb{N}$ (vagy akár $S \subset \mathbb{N}$) állapottéren.

Tfh $\forall j \in S$-re $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = j) < \infty$.

Tegyük fel továbbá, hogy $\exists\, L < \infty$ és $d > 0$, hogy $\forall j \in S$, $j \geq L$ esetén $\mathbb{E}(X_{n+1} | X_n = j) \leq j - d$

[vagyis: Ha $j \geq L$, akkor j-ből indulva a várható érték legalább d-vel csökken.]

Ekkor X_n pozitív rekurrens.

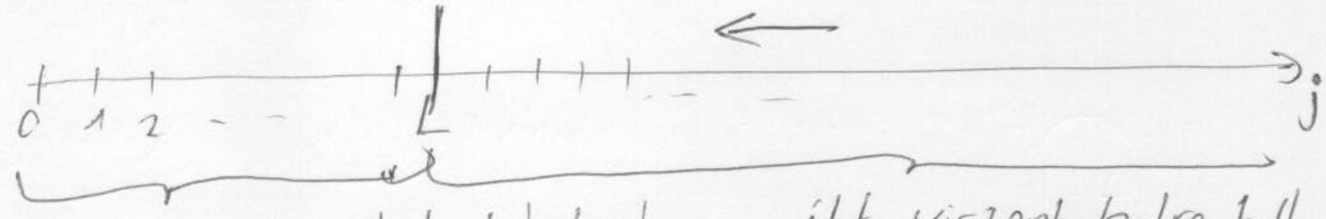
[Köv: Ha még X_n aperiodikus is, akkor X_n stabil.]

Biz.: indirekt: Tfh X_n nem pozitív rekurrens.

Ekkor egy korábbi tétel szerint $\forall j \in S$-re $\mathbb{P}(X_n = j) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Vagyis a súly minden állapotból (külön-külön) elfolyik $\Longrightarrow$ minden véges halmazból, pl. a $\{0, 1, \ldots, L\}$ halmazból is elfolyik.

Így elég hosszú idő után

S:



innen ugorhatnánk bárhová, de már nincs itt súly

itt viszont balra kell ugrani (várható értékben), legalább d-t

$\Longrightarrow$ egy idő után a várható érték minden lépésben legalább $\frac{d}{2}$-vel csökken $\Longrightarrow$ tart a $-\infty$-hez, ami ellentmondás, hiszen $X_n \geq 0$.

Formálisan: legyen

$$C := \max\{\, \mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j) \mid 0 \leq j \leq L \,\} < \infty$$

(Véges sok véges szám maximuma is véges.)

Legyen N olyan nagy, hogy $\forall n \geq N$, esetén

$$\mathbb{P}(X_n \leq L) \leq \frac{d}{4C} \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(X_n \leq L) \leq \frac{1}{4}.$$

[Ilyen N van, mert az indirekt feltevésünk miatt $\mathbb{P}(X_n = j) \longrightarrow 0$ $\forall j$-re.]

Így ha $n \geq N$, akkor a teljes várható érték tétel miatt

4/4

$$\underline{\mathbb{E}(X_{n+1})} = \sum_{j \in S} \mathbb{P}(X_n = j)\, \mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j) =$$

$$= \sum_{\substack{j \in S, \\ j \leq L}} \mathbb{P}(X_n = j) \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j)}_{\leq C} + \sum_{\substack{j \in S \\ j > L}} \mathbb{P}(X_n = j) \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j)}_{\leq j - d}$$

$$\leq C \underbrace{\sum_{\substack{j \in S \\ j \leq L}} \mathbb{P}(X_n = j)}_{\mathbb{P}(X_n \leq L) \leq \frac{d}{4C}} + \underbrace{\sum_{\substack{j \in S \\ j > L}} j\, \mathbb{P}(X_n = j)}_{\leq \sum_{j \in S} j \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{E} X_n} - d \underbrace{\sum_{\substack{j \in S \\ j > L}} \mathbb{P}(X_n = j)}_{\mathbb{P}(X_n > L) \geq \frac{3}{4}}$$

$$\leq \cancel{C} \frac{d}{4 \cancel{C}} + \mathbb{E} X_n - \frac{3}{4} d = \underline{\mathbb{E} X_n - \frac{d}{2}}$$

Ebből $\forall n \geq N$-re

$$\mathbb{E} X_n \leq \mathbb{E} X_N - \frac{d}{2}(n - N) \xrightarrow{n \to \infty} -\infty,$$

ami ellentmondás.

$\square$