$G/G/1$ sor = $G/G/1$ modell

1 etlen kiszolgálónál állnak sorban az igények,
a sor akármilyen hosszú lehet.

Az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, T_3 \ldots$ azonos $\sim T$ eloszlásúak
a kiszolgáláshoz szükséges idők $S_1, S_2, S_3, \ldots$ — // — $\sim S$
→ mind teljesen függetlenek egymástól és a kezdeti állapottól is.

Mivel a modell G/G; $S \geq 0$ tetszőleges eloszlású lehet.
$T \geq 0$ — // —

Sorhosszak

Most is értelmes
$N(t)$:= a sorhossz t idő elteltével
$A_n, \tilde{A}_n$: sorhossz a kiszolgáló szemszögéből
$B_n, \tilde{B}_n$: sorhossz az igények szemszögéből

lásd $M/M/1$, $M/G/1$, $G/M/1$

de ezúttal (általában) egyik sem Markov lánc,
és nem sok okosat tudunk mondani róluk.
[Egy keveset tudnánk, de nem tesszük.]
Helyette keresünk jobb/könnyebb kérdést:

Várakozási idők a G/G/1 modellben FIFO esetben

Legyen W_n az n-edik igény várakozási ideje, vagyis az érkezésétől a sorra kerüléséig eltelt idő.

és nem a távozásáig

Észrevétel: Erre most is teljesül a

$$W_{n+1} = \left(W_n + S_n - T_{n+1} \right)_+$$

evolúciós egyenlet

S_n: n. igény kiszolgálási ideje

T_{n+1}: n+1. igény érkezési ideje az n. érkezésétől mérve

pont úgy, mint diszkrét időben:

- W_n időt várt az n.
- az n+1. nála S_n-nel később kerül sorra (ha megérkezik addigra)
- de T_{n+1}-gyel később érkezik, így neki csak $W_n + S_n - T_{n+1}$ időt kell várni (már ha ez nem negatív, mert ha az lenne, akkor ő az n. igény távozása után érkezett $\Rightarrow W_{n+1} = 0$)

[Részletesebb indoklás rajzzal: lásd a ~~sz~~ diszkrét idejű jegyzetben. FONTOS a FIFO kiszolgálás.]

Ugyanez másképp: $\boxed{U_n := S_n - T_{n+1}}$ jelöléssel

$$\boxed{\begin{array}{l} W_{n+1} = (W_n + U_n)_+ , \text{ ahol} \\ U_1, U_2, U_3 \ldots \sim U \text{ azonos eloszlásúak,} \\ \text{teljesen ftl-ek egymástól és } W_1\text{-től is.} \end{array}}$$

Köv: W_n most is (diszkrét idejű) Markov lánc.

Apró nehézség: Ez a W_n Markov lánc folytonos állapotterű ($W_n \in [0,\infty)$ bármi lehet), és mi ~~ilyet~~ ilyet nem is definiáltunk. A precíz definíció nem is könnyű.

Kapcsolódó kérdés: Vajon mit jelent a stabilitás egy ilyen folytonos állapotterű Markov láncra?

- Azt biztos nem, hogy minden állapotba 1 val. széggel visszatérünk/eljutunk, mert túl sok az állapot (∞ idő alatt is csak megszámlálható sok állapotba jutunk el).

- Jó kérdés viszont a <u>0-ba való visszatérés</u>: Igaz-e, hogy 1 valószínűséggel előbb-utóbb elfogy a sor (vagyis $W_n = 0$ lesz)?
- Másik jó kérdés: Van-e <u>határeloszlás</u>, pl. az $F_n(x) := \mathbb{P}(W_n \leq x)$ ~~sűrűség~~ függvények eloszlás sorozata konvergál-e, amint $n \to \infty$?
- Van-e <u>stacionárius eloszlás</u>, vagyis lehetséges-e, hogy $W_1 \sim W_2 \sim W_3 \sim \ldots$ mind azonos eloszlású?

<u>Célszerű jelölés most is:</u>

$$\rho := \frac{\mathbb{E}S}{\mathbb{E}T} \quad \text{a } \underline{\text{kihasználtsági tényező}}$$

$\boxed{\text{Nem meglepő } \underline{\text{Tétel}}}$ ① Ha $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T$ (vagyis $\rho < 1$), akkor a W_n lánc stabil, értsd:

- $\mathbb{P}$(0-ba való elérés) $= 1$
- $\exists!$ stacionárius eloszlás, ami egyben határeloszlás is
- és még tudjuk is, hogy mi a stac. eloszlás.

(2) Ha $\mathbb{E}S > \mathbb{E}T$ (vagyis $\varrho > 1$), akkor

W_n instabil, értsd:

- $\mathbb{P}($ 0-ba való visszatérés $) < 1$
- nincs stac. eloszlás, nincs határeloszlás
- sőt: $W_n \to \infty$ 1 valószínűséggel.

[Megj.: Ha $\mathbb{E}S = \mathbb{E}T < \infty$, akkor a helyzet vegyes:
$\mathbb{P}($ 0-ba visszatérés $) = 1$, de határeloszlás nincs.]

Biz.: a.) Könnyű rész: visszatérés: azonnal következik

a nagy számok törvényéből (NSZT):

$W_{n+1} = (W_n + U_n)_+$ ahol $U_n = S_n - T_{n+1}$ f.a.eo sorozat

~~Ha $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T$, akkor~~

Ez persze azt jelenti, hogy $W_{n+1} = \max\{W_n + U_n, 0\} \geq W_n + U_n$

amiből indukcióval $W_{n+1} \geq \underbrace{W_1}_{\text{valami szám}} + \underbrace{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n}_{\text{független azonos eloszlású tagok összege} = \text{bolyongás}}$

$S_n := U_1 + U_2 + \ldots + U_n$

jelöléssel $W_{n+1} \geq W_1 + S_n$

- Ha $\mathbb{E}S > \mathbb{E}T$ ((2) eset), akkor $\mathbb{E}U = \mathbb{E}S - \mathbb{E}T > 0$.

A NSZT miatt 1 valószínűséggel $\frac{S_n}{n} \to \mathbb{E}U > 0$,

amiből $S_n \to \infty \Rightarrow \underline{W_n \to \infty}$. ✓

[Ebből persze köv., hogy a 0-ba való visszatérés val.sége 1-nél kisebb, (ha 1 lenne, akkor ∞ sokszor vissza kéne térni 0-ba, ami ellentmond $W_n \to \infty$-nek)

és köv., hogy nincs határeloszlás: „súly $\to \infty$"]

• Ha $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T$ (① ~~eset~~), akkor ~~$\mathbb{E}U$~~ =

$\mathbb{E}U = \mathbb{E}S - \mathbb{E}T < 0$, amiből $\underline{S_n \to -\infty}$! 1 val.séggel

Belátjuk, hogy $\mathbb{P}(\text{0-ba elérés}) = 1$.

<u>Indirekt feltevés:</u> $W_{n+1} > 0$ minden n-re. Ez azt jelenti,

hogy $\underline{W_{n+1}} = \max\{W_n + U_n, 0\} \neq 0$, hanem $= \underline{W_n + U_n}$ $\forall n$

$\Rightarrow W_{n+1} = W_1 + S_n$ minden n-re, de $S_n \to -\infty$,

szóval ez azt jelentené, hogy $W_n \to -\infty$.

Ez nyilván ellentmondás, hiszen $W_n \geq 0$ ✓

[<u>Magyarul:</u> • Egy jobbra driftes bolyongás $\to \infty$
• Egy balra driftes bolyongás előbb-utóbb eléri a nullát]

b.) Ötletes bizonyítás-rész: határeloszlás

Ezt csak egy spec. esetben bizonyítom:

Egyszerűsítő feltevés: Kezdetben a sor üres vagyis $W_1=0$

Az állítás olyan szép, hogy külön tételben mondom ki:

G/G/1 Várakozási idő határeloszlásának létezése a stabil esetben

Tétel Tfh $W_1 = 0$, $W_{n+1} = (W_n + U_n)_+$ $n=1,2,\dots$

ahol $U_1, U_2, U_3 \dots$ f.a. eo $\sim U$, és $\mathbb{E}U < \infty$.

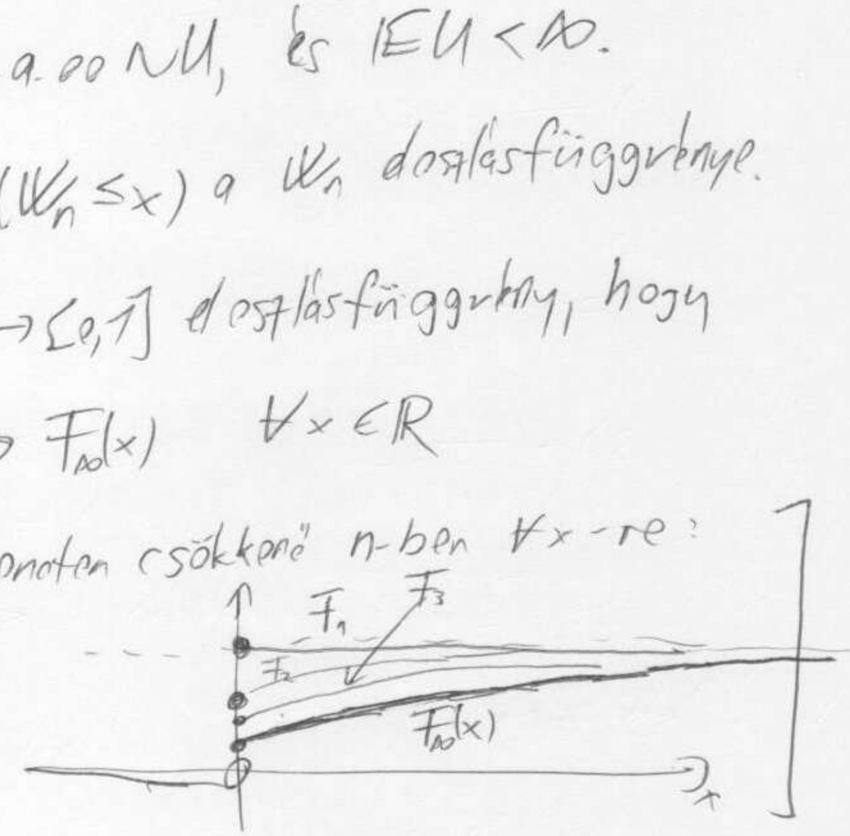
Legyen $F_n(x) = \mathbb{P}(W_n \le x)$ a W_n eloszlásfüggvénye.

Ekkor $\exists F_\infty: \mathbb{R}\to[0,1]$ eloszlásfüggvény, hogy

$$F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F_\infty(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

[Ráadásul $F_n(x)$ monoton csökkenő n-ben $\forall x$-re:

$F_n(x) \searrow F_\infty(x)$



]

Biz.: $W_1 = 0 \Longrightarrow W_1+U_1 = U_1$

$W_2 = (0+U_1)_+ = U_{1+} = \max\{0, U_1\}$

$\Downarrow$

$\cancel{W_3 = (W_2+U_2)_+}$

$W_2 + U_2 = \max\{U_2, U_1+U_2\}$

8/15

Biz.:

- $W_1 = 0 \Rightarrow W_1 + U_1 = U_1 \Rightarrow W_2 = (U_1)_+ = \max\{0, U_1\}$
- $W_2 = \max\{0, U_1\} \xRightarrow{!!} W_2 + U_2 = \max\{U_2, U_2 + U_1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W_3 = \left(\max\{U_2, U_2+U_1\}\right)_+ = \max\{0, U_2, U_2+U_1\}$$

- $W_3 = \max\{0, U_2, U_2+U_1\} \Longrightarrow \xrightarrow{\text{ugyanígy}} W_4 = \max\{0, U_3, U_3+U_2, U_3+U_2+U_1\}$

⋮ stb

$$\boxed{W_{n+1} = \max\{0, U_n, U_n+U_{n-1}, \cancel{U_n+U_{n-1}}\ U_n+U_{n-1}+U_{n-2}, \dots, U_n+U_{n-1}+\dots+U_1\}}$$

Jaj, de rémisztő.

Ötlet: Sorszámozzuk át az U_n-eket: legyen ideiglenesen

$$\tilde{U}_1 = U_n;\ \tilde{U}_2 = U_{n-1};\ \tilde{U}_3 = U_{n-2};\ \dots;\ \tilde{U}_n = U_1$$

~~Legyen W_{n+1}~~ = Legyen $\tilde{S}_1 = \tilde{U}_1$

$$\tilde{S}_2 = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2$$

$$\tilde{S}_n = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \dots + \tilde{U}_n$$

ezzel $\boxed{W_{n+1} = \max\{0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \dots, \tilde{S}_n\}}$

Lényeg: Az $(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \dots \tilde{U}_n)$ sorozat ugyanolyan eloszlású f. a. eo sorozat, mint az $(U_1, U_2, U_3 \dots U_n)$, ezért

$S_n := U_1 + \dots + U_n$-nel

W_{n+1} ugyanolyan eloszlású, mint

$$\boxed{\tilde{W}_{n+1} := \max\{0, S_1, S_2, S_3, S_4 \dots, S_n\}}$$

[Fontos: Szó sincs arról, hogy a $W_1, W_2, W_3, \dots$ sorozat és a $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3, \dots$ sorozat ugyanolyan lenne, vagy hogy $\tilde{W}_{n+1} = W_{n+1}$ lenne. ~~akárhogy~~
Csak az eloszlásuk egyezik meg minden n-re.
Szerencsére a mi tételünk csak W_n eloszlásáról szól.]

Vagyis ~~$F_{n+1}(x) = \mathbb{P}(W_{n+1} \leq$~~

$F_n(x) = \mathbb{P}(W_n \leq x) = \mathbb{P}(\tilde{W}_n \leq x)$ határértékét keressük.

Jó hír: A $\tilde{W}_n$ sorozat monoton növekvő:

$\tilde{W}_{n+1} = \max\{\tilde{W}_n, S_n\} \geq \tilde{W}_n$, ezért biztosan konvergens

$\therefore \exists \tilde{W}_\infty := \lim_{n \to \infty} \tilde{W}_n$ val. változó. [legrosszabb esetben a határérték végtelen]

[Megj: Ezért szuper a bizonyítás ötlete: az eredeti W_n sorozat persze ~~nem~~ sokkal bonyolultabb, hol nő, hol csökken.]

Cserébe $F_n(x)$ monoton csökkenő n-ben:

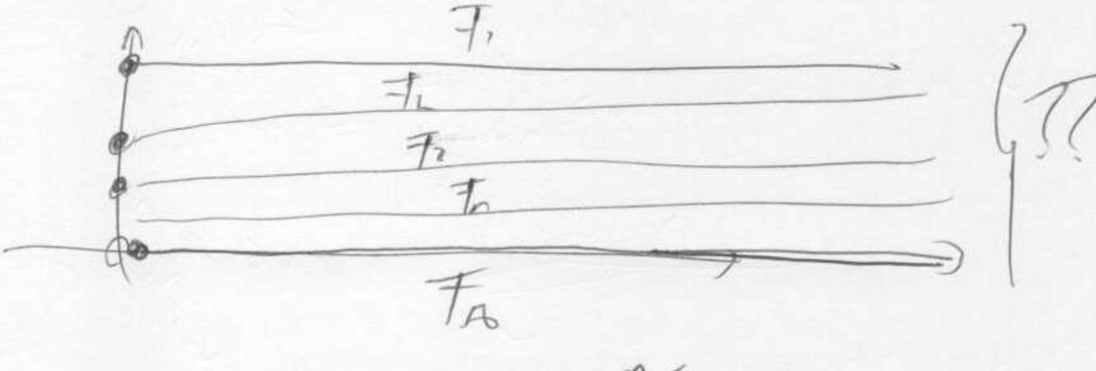
$$F_{n+1}(x) = \mathbb{P}(\tilde{W}_{n+1} \le x) \le \mathbb{P}(\tilde{W}_n \le x) = F_n(x)$$

ha $\tilde{W}_{n+1} \le x$, teljesül akkor $\tilde{W}_n \le x$ is teljesül (mert $\tilde{W}_{n+1} \ge \tilde{W}_n$)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{tényleg } \exists \; F_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)}$

Ami még hiányzik: ~~Az~~ Ez az F_∞ tényleg eloszlásfüggvény?

[Avagy: Nem szökik meg súly a ∞-be?
Nem lehet, hogy $F_\infty(x) \equiv 0$?



]

Válasz: Persze F_∞ pont a $\tilde{W}_\infty$ eloszlásfüggvénye:

$$F_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\tilde{W}_n \le x) \underset{\text{elhiszi}}{\overset{\text{mindenki}}{=}} \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \tilde{W}_n \le x\right) = \mathbb{P}(\tilde{W}_\infty \le x),$$

vagyis tényleg eloszlásfüggvény,

AMENNYIBEN $\tilde{W}_\infty \in \mathbb{R}$ tisztességes val. változó!!

Kérdés: Tényleg, $\tilde{W}_\infty < \infty$ 1 valószínűséggel?

Aggasztó gondolat:

matematikusok azt írnák, hogy sup = „szuprémum"

$$\underbrace{\tilde{W}_{n+1} = \max\{0, S_1, S_2, \dots S_n\}}_{\text{n db szám maximuma}} \xrightarrow{n\to\infty} \tilde{W}_\infty = \underbrace{\max\{0, S_1, S_2, S_3, \dots\}}_{\infty \text{ sok szám maximuma}}$$

Szerencse: ~~HA~~ $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$,

ezért $\boxed{\text{HA } \mathbb{E}U < 0}$

(Na végre, hogy kihasználtuk a stabilitási feltételt! Nélküle nem lenne igaz a tétel.)

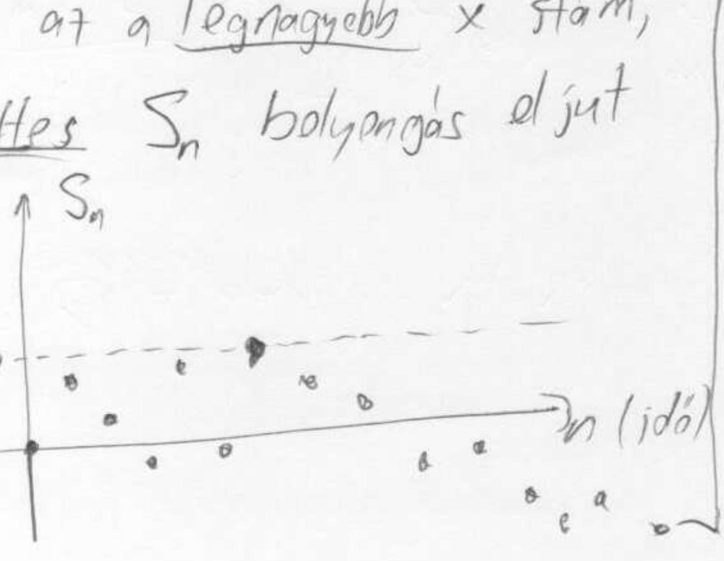
akkor $S_n \to -\infty$,

vagyis az $S_1, S_2, S_3 \dots$ sorozat 1 val. séggel csak véges sok pozitív elemet tartalmaz

$\Rightarrow$ tényleg van véges maximuma: $P(\tilde{W}_\infty < \infty) = 1$ □

[Azt láttuk, hogy $\tilde{W}_\infty$ az a legnagyobb x szám, ameddig a balra driftes S_n bolyongás eljut a 0-ból indulva:

$\boxed{\text{Ez biztosan véges.}}$ $\tilde{W}_\infty \longrightarrow$



]

A várakozási idő eloszlásának időfejlődése, a határeloszlás karakterizációja G/G/1 modellben

Láttuk: Ha $\mathbb{E}S < \mathbb{E}T$ (vagyis $\mathbb{E}U < 0$), akkor az $F_n(x) := \mathbb{P}(W_n \le x)$ eloszlásfv-sorozatnak van $F_\infty(x)$ határértéke (vagyis van határeloszlás)

Kérdés: Mi ez az eloszlás?

Ehhez először értsük meg F_n ~~fel~~ fejlődését, amint n növekszik

Figyelmeztetés!! Az eloszlásfv-nek 2 szokásos definíciója van:

1.) $\boxed{F_n(x) := \mathbb{P}(W_n \le x)}$ (angolszász szokás)

2.) $F_n(x) := \mathbb{P}(W_n < x)$ (orosz definíció).

Ez mindegy lenne ha W_n abszolút folytonos lenne, de most nem az: a stabil esetben a sorhossz időnként nulla $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(W_n=0) \gneq 0$. Ezért mostantól következetesen ragaszkodunk az egyik — most: az $\boxed{\text{angolszász}}$ definícióhoz. Persze a másik is jó lenne, de a végén a tétel kicsit másképp nézne ki.

13/15

Tétel (a várakozási idő eloszlásának időfejlődése G/G/1 modellben, FIFO esetben)

$F_n(x) := \mathbb{P}(W_n \le x)$, $S_n - T_{n+1} \sim U$ jelöléssel

$$F_{n+1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x<0 \\ \mathbb{E}(F_n(x-U)), & \text{ha } x \ge 0 \end{cases}$$

Ez ijesztően néz ki, de értelmes:

$U \in \mathbb{R}$ egy val. változó
$0 \le x \in \mathbb{R}$ egy szám
$F_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ egy függvény

$\Rightarrow F_n(x-U)$ is egy val. változó $\in [0,1]$ $\Rightarrow$

van neki várható értéke.

Spec ① Ha U abszolút folytonos f_U sűrűségfüggvénnyel, akkor

$$\mathbb{E}(F_n(x-U)) = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x-u) f_U(u)\,du$$

② Ha U diszkrét, lehetséges értékei $u_1, u_2, u_3, \ldots \in \mathbb{R}$
ezek valószínűségei $p_1, p_2, p_3, \ldots$,

akkor $\mathbb{E}(F_n(x-U)) = \sum_i F_n(x-u_i) p_i$

③ Ha U vegyes (van diszkrét és abszolút folytonos komponense is, akkor HF (könnyű).

Biz.: Csak az abszolút folytonos esetet számolom ki:

a.) W_{n+1} várakozási idő $\geq 0 \Rightarrow$ ha $x<0$,

akkor $\mathbb{P}(W_{n+1}\le x) \le \mathbb{P}(W_{n+1}<0) = 0$ ✓

b.) Ha viszont $x \ge 0$ akkor

$$\mathbb{P}(W_{n+1}\le x) = \mathbb{P}\big(\underbrace{(W_n+U_n)_+}_{\max\{0,\,W_n+U_n\},\ \text{ez } \le x \iff W_n+U_n\le x} \le x\big) \overset{x\ge 0}{=} \mathbb{P}(W_n+U_n\le x) =$$

$$= \mathbb{P}(W_n \le x-U_n) \underset{\text{tétel, folytonos eset}}{\overset{\text{teljes valószínűség}}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} f_U(u)\,\mathbb{P}(W_n\le x-u)\,du$$

(amit ki se mondtam, de mindenki elhiszi)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_U(x)\,F_n(x-u)\,du$$

Köv:

Tétel (a várakozási idő stacionárius eloszlása G/G/1 modellben, FIFO esetben)

$S_n - T_{n+1} \sim U$ jelöléssel a W_n várakozási idő stacionárius eloszlásának F_∞ eloszlásfüggvénye eleget tesz az

$$\boxed{F_\infty(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\\ \mathbb{E}\big(F_\infty(x-U)\big), & \text{ha } x\ge 0\end{cases}}$$

Lindley-féle integrálegyenletnek

Spec.: Ha U abszolút folytonos f_u sűrűségfüggvénnyel,

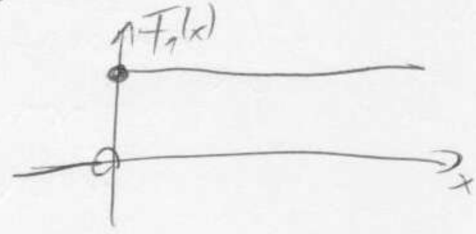
akkor
$$\boxed{F_\infty(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\\ \int_{-\infty}^{\infty} f_u(x)\,F_\infty(x-u)\,du, & \text{ha } x\geq 0.\end{cases}}$$

<u>Jó hír</u>: Ez az egyenlet <u>karakterizálja</u> az eloszlást:
így elvileg pontosan ismerjük, mindent ki tudunk számolni.

<u>Rossz hír</u>: Az egyenletet expliciten megoldani csak nagyon speciális esetekben tudjuk.

<u>Vigasz</u>: A numerikus megoldás nem nehéz:

pl. $F_1(x):=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\\ 1, & \text{ha } x\geq 0\end{cases}$



-ból indulva az $F_{n+1}(x):=\begin{cases}0, & \text{ha } x<0\\ \int_{-\infty}^{\infty} f_u(x)\,F_n(x-u) & \end{cases}$

iteráció elég stabilan konvergál F_∞-hez, ha f_u ép-eszű.