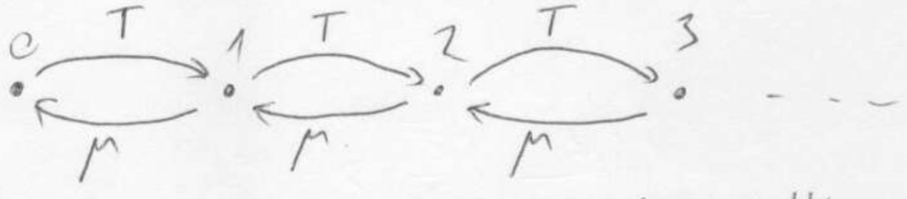
G/M/1 modell

- 1 etlen kiszolgálónál állnak sorban az igények, a sor bármilyen hosszú lehet.
- Az igények <u>felújítási</u> folyamat szerint érkeznek: az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, T_3 \dots$ f.a.eo, de nem biztos, hogy $\sim Exp(\lambda)$
- A kiszolgálási idők ~~f~~ függetlenek $\sim Exp(\mu)$

<u>Jelölések, mint korábban.</u>

$N(t)$: a sorhossz t idő elteltével



A_n : a sorhossz az n-edik <u>kiszolgálás</u> <u>után</u> közvetlenül

A_n^- : ~ <u>előtt</u>

B_n : <u>érkezés</u> <u>után</u>

B_n^- : ~ <u>előtt</u>

$\lambda := \frac{1}{ET}$ az érkezési folyamat intenzitása (akkor is, ha T nem exponenciális)

$\boxed{\text{TEGYÜK FEL, HOGY } \lambda > 0, \text{ vagyis } ET < \infty}$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ a kihasználtsági tényező

[Persze $A_n^- = A_n + 1$; $B_n = B_n^- + 1$]

Jelenség / lényeg Ezúttal B_n, ill. B_n^- lesz Markov lánc (vagyis a ~~sor~~ sorhossz az igények szemszögéből), $N(t)$, A_n és A_n^- viszont <u>nem</u>.

Ám ha B_n stabil, akkor a határeloszlásából ki tudjuk találni a többi folyamat határeloszlását / stacionárius eloszlását / látogatási gyakoriságait.

> <u>Tétel</u> Tfh a B_n Markov lánc stabil, egyetlen stac. eloszlása π^B. Ekkor A_n^--nak is van határeloszlása, vagyis
>
> $$\exists\ \pi_k^{A^-} := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n^- = k), \text{ éspedig } \pi_k^{A^-} = \pi_k^B \quad \forall k.$$

<u>Biz.</u>: <u>Ugyanúgy</u>, mint az $M/G/1$ ill. $M/M/1$ esetben:

- B_n minden látogatása k-ban megfelel egy ugrásnak az ~~...~~ $N(t)$ folyamatban. $\quad k-1 \to k$
- és
- A_n^- minden látogatása k-ban megfelel egy ugrásnak az $N(t)$ folyamatban, $\quad k-1 \leftarrow k$

ezekből hosszú távon kb ugyanannyinak kell lenni (±1 lehet az eltérés).

□ (nagyon vázlatosan)

Ha $N(t)$ határeloszlását akarjuk összevetni A_n^--ével, kicsit jobban észnél kell lenni: Hiába exponenciálisak a kiszolgálási idők,
$\Updownarrow$
örökifjúk

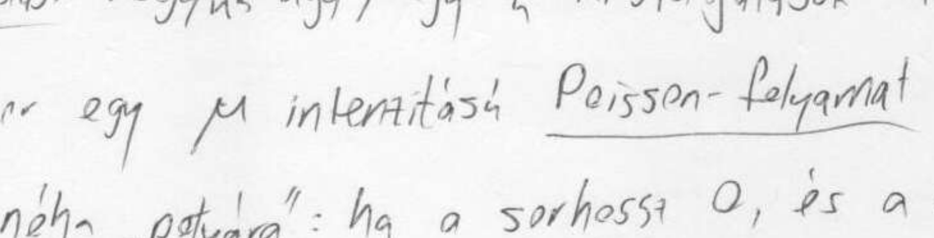
nem lesz igaz, hogy hosszú távon

$\left(k-1 \longleftarrow k \text{ ugrások száma} \right) \sim \left(N(t) \text{ által } k\text{-ben eltöltött idő} \right)$,

mert 0-ban is töltünk időt, és onnan nem lehet lefelé ugrani.

Megoldás: Vegyük úgy, hogy a kiszolgálások akkor történnek, amikor egy μ intenzitású Poisson-folyamat csörög, de néha „potyára": ha a sorhossz 0, és a kiszolgálási folyamat csörög akkor persze nem történik semmi.

Avagy:



bevettünk egy hurokélt, és ezen is számoljuk az ugrásokat.

Jelölés: $\tilde{A}_n^- :=$ a sorhossz a kiszolgálási Poi-folyamat n-edik csörgése előtt közvetlenül

[Vegyük észre: $A_n^- \geq 1$, de $\tilde{A}_n^-$ lehet 0 is.]

Ezt lehet jól összehasonlítani $N(t)$-vel:

Tfh $N(t)$ stacionárius eloszlása Π^N,

és legyen t hosszú idő.

Ekkor t idő alatt

kb ennyiszer lép $\hat{A}_n^-$

- a kiszolgálási Poi-folyamat csörög kb $t \cdot \mu$ alkalommal
- a sor hossza k kb $t \cdot \Pi_k^N$ ideig

↳ ezen $t \cdot \Pi_k^N$ idő alatt a kiszolgálási folyamat csörög kb $t\,\Pi_k^N \cdot \mu$ alkalommal

↳ kb ennyiszer lesz $\hat{A}_n = k$

$\tilde{\hat{A}}_n^-$ a maga (diszkrét) idejének $\frac{t\Pi_k^N \mu}{t\mu} = \Pi_k^N$ hányadát tölti k-ban

Ezzel azt láttuk be, hogy

$$\boxed{\text{\underline{Tétel} Stacionárius G/M/1 modellben } N(t) \text{ és } \tilde{A}_n^- \text{ eloszlása azonos.}}$$

Ami még kell: A_n^- és $\tilde{\hat{A}}_n$ viszonya. Ez könnyű: A_n^- ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $\tilde{\hat{A}}_n^-$, csak figyelmen kívül hagyjuk a nullákat.

Persze most is: legyen t hosszú idő

- ez alatt kb $t\lambda$ darab igény érkezik
- Ha a rendszer stabil, akkor kb. ugyanennyit is szolgálunk ki
- pedig a kiszolgálási Poi-folyamat kb $t\mu$ alkalommal csörög

$\Longrightarrow$ a kiszolgálási folyamat csörgéseinek kb $\frac{t\mu - t1}{t\mu} = 1-\frac{1}{\mu} = 1-\varrho$ hányada megy pocsékba, vagyis stacionárius esetben

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{üresjárat}) = \mathbb{P}(N(t)=0) = \mathbb{P}(\tilde{A}_n^- = 0) = 1-\varrho}$$

Ezeket összerakva

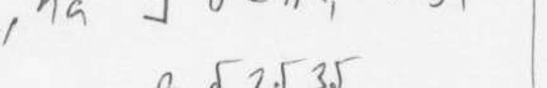
Tétel: Stacionárius $G/M/1$ modellben

$$\mathbb{P}(N(t)=k) = \mathbb{P}(\tilde{A}_n^- = k) = \begin{cases} 1-\varrho, & \text{ha } k=0 \\ \varrho\,\mathbb{P}(A_n^- = k) = \varrho\,\mathbb{P}(B_n = k), & \text{ha } k \geq 0 \end{cases}$$

Minden röviden: Elég a B_n Markov láncot megérteni: minden mást ki tudunk belőle hozni.

Megj: Ha B_n stabil, akkor az összes felsorolt folyamat (B_n^-, A_n, A_n^-, $\tilde{A}_n^-$, $N(t)$) stac. eloszlása is létezik és egyértelmű. Ezek egyben határeloszlások is, KIVÉVE $N(t)$ esetében: ott kell még egy gyenge feltétel.

Def: A T val. változó eloszlása rácsos, ha $\exists\, \delta \in \mathbb{R}$, hogy T csak a δ többszöröse lehet:



(vagyis csak egy 1-dimenziós rácson vehet fel értékeket.

Ha a T érkezési időköz rácsos, akkor minden érkezési (a legelsőtől számítva) idő (örökre) csak δ többszöröse lehet. Ilyenkor $N(t)$-nek nyilván nincs határeloszlása: pl. ha $T \equiv 1$, vagyis <u>pontosan</u> 1 másodpercenként jönnek ~~az~~ igények, (és a legelsőpont $t=0$-tól mérjük) akkor

$$N(100000.001) \approx N(99999.999)+1,$$

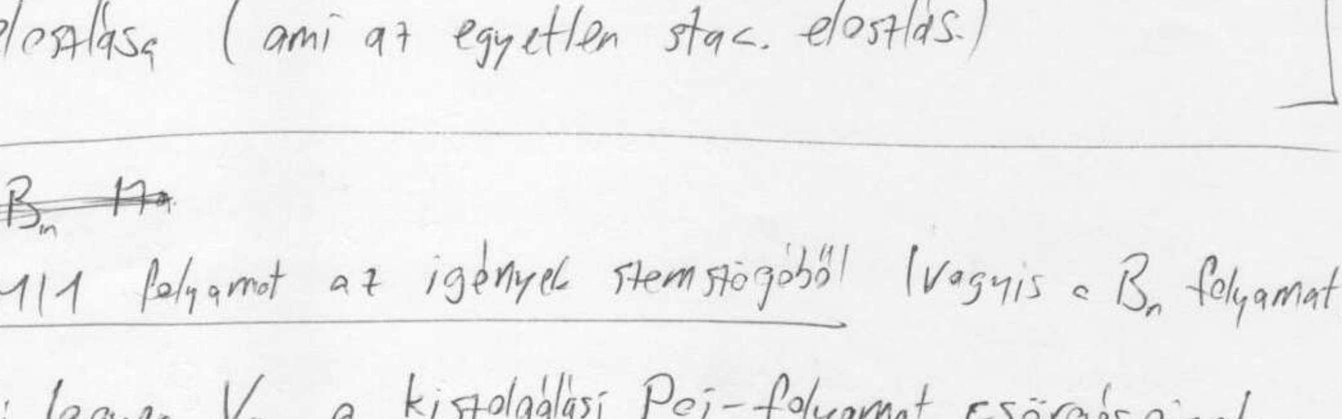
a két eloszlás nyilván nem lesz közel.

<u>Tény</u>: Minden más esetben (vagyis ha T nem rácsos — pl. abszolút folytonos) $N(t)$-nek is van határeloszlása (ami az egyetlen stac. eloszlás.)

~~A B_n Ha~~

<u>G/M/1 folyamat az igények szemszögéből</u> (vagyis a B_n folyamat)

<u>Def</u>: legyen V_n a kiszolgálási Poi-folyamat csörgéseinek száma az $(n-1)$-edik és n-edik igény érkezése között (ami egy T_n hosszú időintervallum)



Látható, hogy $V_1, V_2, V_3 \ldots$ független és azonos eloszlású.
Az eloszlásukat tanultak: Poi folyamat véletlen idő alatt
$\Longrightarrow$ közös generátorfv-ük

$$\boxed{g_V(z) = L_T(\mu(1-z))}$$

ahol L_T a T Laplace transzformáltja
μ pedig az érkezési folyamat intenzitása

<u>Tétel</u> G/M/1 sorban a B_n folyamat eleget tesz a

$$B_{n+1} = (B_n - V_{n+1})_+ + 1$$

evolúciós egyenletnek, ahol
$V_1, V_2, V_3 \ldots$ független azonos eo.,

avagy:
$B_{n+1} = (B_n - V_{n+1}) + Y_{n+1}$
ahol $Y_n \equiv 1$

~~vagy~~ tehát tényleg időben homogén Markov lánc.

<u>Biz.:</u> Az n. igény érkezése után közvetlenül B_n db igény áll a sorban. Amíg az $(n+1)$-ediket várjuk, kiszolgálunk közülük V_{n+1} darabot — de legfeljebb ~~mindet~~ annyit, amennyi van — marad hát $(B_n - V_{n+1})_+$.
Ehhez érkezik ~~meg egy~~ meg az az 1, amit vártunk. $\square$

Köv: Tanultuk, hogy B_n stabil $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{E}V>1$
és ilyenkor a határeloszlása
$$B_{stac} \sim Geom(1-\theta)$$
ahol θ a $\theta = g_V(\theta)$ egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása.

Esetünkben $\mathbb{E}V = \mu \mathbb{E}T = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\varrho}$,
$$g_V(z) = L_T(\mu(1-z)), \text{ amiből}$$

Tétel A $G/M/1$ modell stabil $\Longleftrightarrow$ $\varrho<1$.
Ilyenkor B_n határeloszlása $B_{stac} \sim Geom(1-\theta)$,
ahol θ a $\theta = L_T(\mu(1-\theta))$ egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása.

Köv: Stabil $G/M/1$ modellben (vagyis ha $\varrho<1$)
a stacionárius (avagy: határ) eloszlásokra
$$B_n \sim A_n^- \sim Geom(1-\theta) \Rightarrow \mathbb{E}B_n = \mathbb{E}A_n^- = \frac{1}{1-\theta}$$
$$B_n^- \sim A_n \sim Pessz\,Geom(1-\theta) \Rightarrow \mathbb{E}B_n^- = \mathbb{E}A_n = \frac{\theta}{1-\theta}$$
$$\mathbb{P}(N(t)=k) = \begin{cases} 1-\varrho, & \text{ha } k=0 \\ \varrho(1-\theta)\theta^{k-1}, & \text{ha } k\geq 1 \end{cases}$$
0-ban torzított geometriai
$$\Rightarrow \bar{N} = \mathbb{E}N(t) = \varrho\frac{1}{1-\theta} = \frac{\varrho}{1-\theta}$$

Késleltetés és várakozási idő G/M/1 sorban (FIFO kiszolgálás esetén)

Ez ugyanúgy megy, mint az M/M/1 sor esetén:

az n. igény érkezésekor $B_n^- \sim \text{Poisson}(1-\theta)$ db másik áll előtte a sorban, ő maga beáll $B_n = B_n^- + 1$-ediknek.

Ennyi db (az előzményektől is egymástól is független) $\text{Exp}(\mu)$ időtartamú kiszolgálást kell kivárnia:

$\tilde{S}_1, \tilde{S}_2, \tilde{S}_3, \ldots$ (lásd M/M/1 fejezet)

$\Longrightarrow W_n = \sum_{i=1}^{B_n^-} \tilde{S}_i$ a várakozási ideje

$D_n = W_n + S_n = \sum_{i=1}^{B_n} \tilde{S}_i$ a késleltetése

} véletlen tagszámú összegek

$\Longrightarrow$ pont mint az M/M/1 esetben

Tétel Stabil G/M/1 sorban (vagyis ha $\varrho < 1$) FIFO kiszolgálás esetén a stacionárius (avagy: határ) eloszlásokra $D_n \sim \text{Exp}(\mu(1-\theta))$

$W_n \sim$ hiányos exponenciális: $1-\theta$ val.séggel 0; θ val.séggel $\text{Exp}(\mu(1-\theta))$

$$\Longrightarrow \bar{D} = \mathbb{E}D_n = \frac{1}{\mu(1-\theta)}\ ; \quad \bar{W} = \mathbb{E}W_n = \frac{\theta}{\mu(1-\theta)} \overset{\text{persze}}{=} \bar{D} - \mathbb{E}S = \frac{1}{\mu(1-\theta)} - \frac{1}{\mu}$$

Megj: Persze stimmel a Little formula:

$$\bar{D} = \bar{N} E T = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{\frac{\varrho}{1-\theta}}{\lambda} \overset{\varrho = \frac{\lambda}{\mu}}{=} \frac{1}{\mu(1-\theta)} \checkmark$$

Spec: Ha $T \sim Exp(\lambda)$, akkor $L_T(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$,

Vagyis a $\theta = L_T(\mu(1-\theta)) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu(1-\theta)}$ egyenletet

kell megoldani: $\theta(\lambda+\mu(1-\theta)) = \lambda \qquad /-\lambda\theta$

$$\theta\mu(1-\theta) = \lambda(1-\theta) \qquad /-\lambda(1-\theta)$$

$$(\theta\mu-\lambda)(1-\theta) = 0$$

$\theta = 1$ vagy $\theta\mu = \lambda$

ez nem kell

$$\boxed{\theta = \frac{\lambda}{\mu} = \varrho}$$

Ezt visszahelyettesítve visszakapjuk az M/M/1 modell képleteit. HF