M/G/1 modell

- 1 etlen kisztolgálónál állnak sorban az igények, a sor bármilyen hosszú lehet.
- Az igények **Poisson** folyamat szerint **érkeznek**, λ intenzitással; a köztes idők $T_1, T_2, T_3 \ldots \sim Exp(\lambda) \sim T$
- Az egyes igények kiszolgálásához szükséges idők: $S_1, S_2, S_3 \ldots$ ~~független~~ azonos eloszlású $\sim S$, függetlenek egymástól és az érkezésektől is, de **akármilyen** eloszlásúak lehetnek — vagyis spec. esetben lehet $S \sim Exp(\mu)$ [ekkor visszakapjuk az M/M/1 modellt], de nehezebb eset, amikor nem.

Jelölések, mint korábban:

$N(t)$: a sorhossz t idő elteltével

A_n : — // — az n-edik kiszolgálás után közvetlenül

B_n^- : — // — — // — igény érkezése előtt közvetlenül

$\varrho := \frac{\mathbb{E}S}{\mathbb{E}T} = \lambda \mathbb{E}S$ a kihasználtsági tényező

$C := \frac{\sqrt{\mathrm{Var}S}}{\mathbb{E}S}$ az S relatív szórása.

Jelölés mostanra:

$\boxed{\tau := \mathbb{E}S}$ a kiszolgálási idő várható értéke

ezzel $\varrho = \lambda\tau$; $\mathrm{Var}\,S = C^2\tau^2$.

$\boxed{\text{Jelenség / lényeg:}}$ A_n időben homogén Markov lánc

~~an~~ a $\{0,1,2,\dots\}$ állapottéren (látni fogjuk),

viszont $N(t)$ és $B_n^-(t)$ általában NEM Markov: a jövőről információt hordoz, hogy mikor volt a legutóbbi kiszolgálás.

JÓ HÍR: $N(t)$ és $B_n^-(t)$ ugyan nem Markov lánc, de attól még (bonyolult) sztochasztikus folyamatok $\{0,1,2,\dots\}$-en,

[Def: Sztochasztikus folyamat = időtől függő valószínűségi változó = véletlen függvény / véletlen sorozat]

és értelmes beszélni

- az időátlagokról: pl $\lim_{n\to\infty} \frac{B_0^- + B_1^- + B_2^- + \dots + B_{n-1}^-}{n}$ ~~(már ha létezik)~~, vagy $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(s)\,ds$ — már ha létezik
- a látogatási gyakoriságról, pl. hogy milyen gyakran jár a folyamat 0-ban hosszú távon:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \underbrace{\{k : B_k^- = 0,\ 0 \le k \le n-1\}}_{\text{0-ban tett látogatások } n\text{-ig}}$$

darabszám

gyasmi, mint egy valószínűség (már ha létezik)

$$\| $$

~~avagy~~

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{0\}}(B_k^-)$$

indikátorfüggvény

avagy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \underbrace{\int_0^t \mathbb{1}_{\{0\}}(N(s))\,ds}_{t\text{-ig a 0-ban eltöltött idő}}$$

- határeloszlásról: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n^- = k) =: \Pi_k^{B^-}$
  $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(N(t) = k) =: \Pi_k^{N}$ — már ha létezik

- stacionaritásról: „Def.” egy sztoch. folyamat stacionárius, ha az időt akármennyire eltolva az egyes megfigyelések vall. sége változatlan marad,

  ilyenkor pl. $N(t)$ eloszlása ugyanaz minden t-re, vagy B_n^- — // — n-re. — éspedig a „stacionárius eloszlás”

Tétel Tfh az A_n Markov lánc stabil, egyetlen stac. eloszlása Π^A.

Ekkor $N(t)$-nek és B_n^--nak is van határeloszlása, ~~ami~~

[vagyis $\exists\ \Pi_k^{B^-} := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n^- = k)$ és $\exists\ \Pi_k^N := \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(N(t) = k)$]

~~ez~~ ami egyúttal az egyetlen stacionárius eloszlásuk is,

~~ami egyúttal az~~ éspedig $\boxed{\Pi_k^N = \Pi_k^{B^-} = \Pi_k^A}$: A három határeloszlás ugyanaz.

Biz. (vázlat): Csalok: nem bizonyítom be a határeloszlás létezését

- kihasználom, hogy hosszú távon

látogatási gyakoriság = határeloszlás szerinti val.ség

[Nem bizonyítom, de ez kétféle értelemben is igaz:

1.) $\forall k \quad \frac{1}{n} \#\{k : 0 \le k \le n-1;\ B_n^- = k\} \xrightarrow{n\to\infty} \Pi_k^{B^-}$ 1 val. séggel

hosszú táv!

[pont mint az ergodtételben]

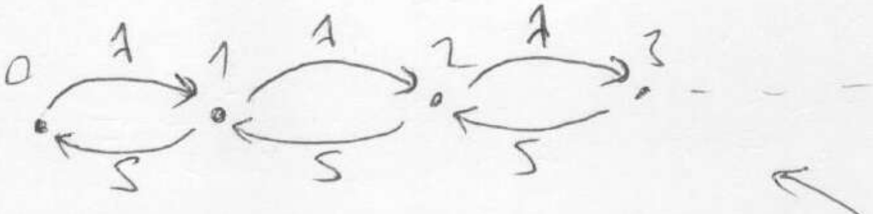
2.) ~~∀~~ stacionárius esetben várható értékben véges időre is:

$\forall k \in \{0,1,\ldots\}$ és $\forall\ n > 0$

$$\mathbb{E}_{stac}\left(\frac{1}{n} \#\{i : 0 \le i \le n-1;\ B_i^- = k\}\right) = \Pi_k^{B^-}$$

[ehhez nem kell $n\to\infty$]

~~ha~~ A <u>látogatási gyakoriságok könnyűek:</u>



ahogy a sor hosszát nézzük időben, egy ilyen gráfon ugrál

[<u>VIGYÁZAT!!</u> Ez nem egy Markov lánc gráf-reprezentációja: valami
S véletlen idő eltelte után ugrunk lefelé, ~~$S \not\sim Exp$~~
S <u>nem</u> exponenciális, és <u>nem</u> kezdődik elölről, ha egy
felfelé ugrás közbejön.]

~~De lo~~ Így most is — $\boxed{\text{pont, mint az M/M/1 modellnél}}$

— hosszú távon

a) $\overset{k}{\circ} \longrightarrow \overset{k+1}{\circ}$ ugrások száma $\approx$ $\overset{k}{\circ} \longleftarrow \overset{k+1}{\circ}$ ugrások száma,

amiből $\pi^{B^-} = \pi^{A}$

b) $\overset{k}{\circ} \longrightarrow \overset{k+1}{\circ}$ ugrások száma $\approx \lambda \cdot (N(t)$ által k-ban eltöltött idő$)$

amiből $\pi^{B^-} = \pi^{N}$

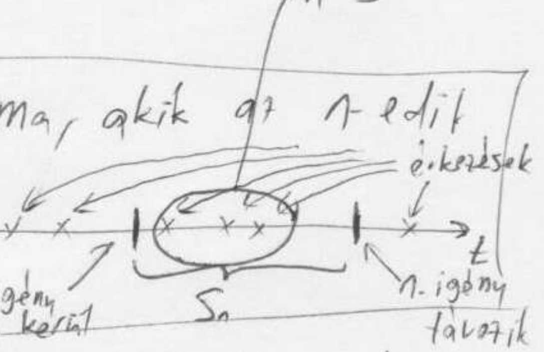
[Ez ugyanis FONTOS, hogy az <u>érkezés Markov</u>: az érkezések
val-sége független a múlttól.]

□ bizonyítás vázlat vége

Köv.: elég az A_n folyamatot megérteni (Emlékeztető:

A_n a sorhossz a kiszolgálás szemszögéből)

Jelölés: Legyen Y_n azon igények száma, akik az n-edik igény kiszolgálása alatt érkeznek.



Így persze $Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ függetlenek, MERT AZ ÉRKEZÉS POI-folyamat szerint történik,

és azonos eloszlású: Y_n ahányszor egy λ intenzitású Poi folyamat csörög S idő alatt.

Így • Ha $A_n \geq 1$, akkor az n. kiszolgálás végeztével rögtön van mit kiszolgálni $\Longrightarrow$ indul az $(n+1)$-edik kiszolgálás:

$\rightarrow$ ez alatt érkezik Y_n db új igény
$\rightarrow$ majd végre kiszolgálunk egyet $\Big\} \Longrightarrow A_{n+1} = A_n + Y_{n+1} - 1$

• Ám ha $A_n = 0$, akkor az n. kiszolgálás végén üresjárat következik $\Longrightarrow$ meg kell várni egy igényt, mielőtt az $(n+1)$-edik kiszolgálás elkezdődhet $\Longrightarrow$

az előzőhöz hasonlóan $A_{n+1} = (A_n + 1) + Y_{n+1} - 1 = A_n + Y_n$

Röviden:

<u>Tétel</u> A_n eleget tesz az

$$A_{n+1} = (A_n - 1)_+ + Y_{n+1}$$

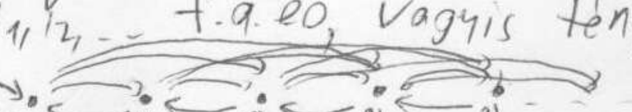
sorhossz-~~el~~dukciós egyenletnek,

avagy:

$$A_{n+1} = (A_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$$

ahol $V_n \equiv 1$

ahol $Y_1, Y_2, \ldots$ f.a.eo, vagyis tényleg Markov lánc.



lefelé legfeljebb 1-et ugrik, de fölfelé akárhányat.

Köv:

<u>Tétel:</u> M/G/1 sor~~ban stacionárius állapotban~~ stabil $\iff$ <u>$\varrho < 1$.</u>
Ekkor a stacionárius állapotban

$$\bar{N} = \bar{A} = \bar{B} = \varrho + \frac{\varrho^2(1+c^2)}{2(1-\varrho)} \qquad \text{(átlages sorhossz)}$$

$$\mathbb{P}(N(t)=0) = \mathbb{P}(A_n = 0) = \mathbb{P}(B_n = 0) = 1 - \varrho \qquad \text{(üresjárat val. sége)}$$

$$\bar{D} = \tau + \frac{\tau\varrho(1+c^2)}{2(1-\varrho)} \qquad \text{(átlages késleltetés)}$$

$$\bar{W} = \frac{\tau\varrho(1+c^2)}{2(1-\varrho)} \qquad \text{(átlages várakozási idő)}$$

<u>Biz.:</u> Y egy λ intenzitású Poi folyamat beütésszáma véletlen S idő alatt $\xrightarrow{\text{tudjuk}}$ $g_Y(z) = L_S(\lambda(1-z))$

generátor fv.   Laplace transzformált

~~Ko~~ Ebből $g_Y'(z) = L_S'(\lambda(1-z))(-\lambda)$

Ebből $z=1$ helyettesítéssel

$$\underbrace{g_Y'(1)}_{\mathbb{E}Y} = \underbrace{L_S'(0)}_{-\mathbb{E}S}\cdot(-\lambda) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \lambda \mathbb{E}S\\ &= \lambda\tau\\ &= \varrho\end{aligned}}$$

~~(hát persze)~~

$\boxed{\text{stabilitás feltétele tehát } \varrho<1}$

$$g_Y''(z) = L_S''(\lambda(1-z))(-\lambda)^2 \qquad / z:=1$$

$$\underbrace{g_Y''(1)}_{\mathbb{E}(Y^2-Y)} = \lambda^2 \underbrace{L_S''(0)}_{\mathbb{E}(S^2)} \Rightarrow \mathbb{E}(Y^2) = \lambda^2\mathbb{E}(S^2)+\mathbb{E}Y$$

$\Downarrow$ kis számolás

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Var}\,Y &= \lambda^2 \mathrm{Var}\,S + \lambda\mathbb{E}S\\ &= \lambda^2 c^2\tau^2+\lambda\tau\\ &= c^2\varrho^2+\varrho\end{aligned}}$$

De az $A_{n+1}=(A_n-1)_+ + Y_{n+1}$ evolúciós egyenlet üresjáratára és átlagos sorhosszára van képleteink régről:

$$\mathbb{P}(\text{üresjárat}) = P(A_{stac}=0) = 1-\mathbb{E}Y = 1-\varrho \quad \checkmark$$

$$\bar{A} = \frac{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y)+\mathrm{Var}\,Y}{2(1-\mathbb{E}Y)} = \frac{\varrho(1-\varrho)+c^2\varrho^2+\overset{-\varrho^2+\varrho^2}{\varrho}}{2(1-\varrho)} =$$

$$= \frac{2\varrho(1-\varrho)+\varrho^2(1+c^2)}{2(1-\varrho)} = \varrho + \frac{\varrho^2(1+c^2)}{2(1-\varrho)} \quad \checkmark$$

Mivel a stacionárius esetben $N(t)$, A_n és B_n^- mind azonos eloszlású, persze $\bar{N}=\bar{A}=\overline{B^-}$ mind ugyanaz.

Ebből $\bar{D}$ ~~is~~ kijön a Little formulával:

$$\bar{D} = \frac{\bar{N}}{\text{érkezési intenzitás}} = \frac{\bar{N}}{\lambda} \overset{\varrho = \lambda\tau}{=\!=} \tau + \frac{\tau\varrho(1+c^2)}{2(1-\varrho)}$$

és persze $D_n = W_n + S_n$ miatt $\bar{D} = \bar{W} + \mathbb{E}S = \bar{W} + \tau$,

így $\bar{W} = \bar{D} - \tau = \dfrac{\tau\varrho(1+c^2)}{2(1-\varrho)}$

$\square$

Speciesed: Ha $S \sim Exp(\mu)$, akkor $\tau = \frac{1}{\mu}$, $c = 1$.

Ezt behelyettesítve visszakapjuk az M/M/1 sor képleteit.
(HF)

A sorhossz eloszlása

Tétel: M/G/1 sorban stacionárius esetben (vagyis $\varrho < 1$, a rendszer stabil)
$N(t)$, A_n és B_n közös generátorfüggvénye

$$g_A(z) = g_B(z) = g_N(z) = (1-\varrho)(1-z)\frac{L_S(\lambda(1-z))}{L_S(\lambda(1-z)) - z},$$

ahol L_S az S kiszolgálási idő Laplace transzformáltja.

Biz.: Az $A_{n+1} = (A_n - 1)_+ + Y_{n+1}$ evolúciós egyenletről tudjuk, hogy

$$g_A(z) = \underbrace{(1-\varrho)}_{p_0}(1-z)\frac{g_Y(z)}{g_Y(z) - z} \qquad g_Y(z) = L_S(\lambda(1-z))$$

$\square$

A késleltetés és a várakozási idő eloszlása

Tétel: M/G/1 sorban $\boxed{\text{FIFO esetben}}$ stacionárius esetben (vagyis $\varrho<1$, a rendszer stabil)

a W_n várakozási idők (közös) Laplace transzformáltja

$$L_W(s) = (1-\varrho)\frac{s}{\lambda L_S(s)+s-\lambda},$$

a D_n késleltetések (közös) Laplace transzformáltja

$$L_D(s) = (1-\varrho)\frac{s\,L_S(s)}{\lambda L_S(s)+s-\lambda}$$

Biz.: $D_n = W_n + S_n \xRightarrow{\text{függetlenség}} L_D = L_W \cdot L_S$, ami stimmel.

Így persze még L_W és L_D képletei közül az egyiket bizonyítani, és mi L_D-t fogjuk.

$\boxed{\text{NAGY ÖTLET}}$: FIFO kiszolgálás esetén kik vannak a sorban, amikor ~~az~~ az n-edik igény távozik?

Hát pontesan azok, akik
- ő utána érkeztek,
- még mielőtt távozott volna

vagyis pont azok akik az n. igény $\boxed{\text{késleltetése}}$ alatt érkeztek:

vagyis
- Végy egy D_n hosszú időszakot
- Nézd meg, hogy ez alatt hányszor csörög egy λ intenzitású Poi-folyamat

Ennyi lesz A_n.

De ennek meg tudjuk a generátor fv-ét:

$$\boxed{g_{A_n}(z) = L_{D_n}(\lambda(1-z))} \quad \forall z \in [0,1]$$

Poi folyamat véletlen idő alatt

Ebből $S := \lambda(1-z)$, vagyis $\frac{s}{\lambda} = 1-z$, $z = 1-\frac{s}{\lambda}$

helyettesítéssel

$$L_D(s) = g_A(z) \overset{\text{előző}}{\underset{\text{tétel}}{=}} (1-\rho)\underbrace{(1-z)}_{\frac{s}{\lambda}} \frac{L_S(\overbrace{\lambda(1-z)}^{s})}{L_S(\underbrace{\lambda(1-z)}_{s}) - \underbrace{z}_{1-\frac{s}{\lambda}}} =$$

$$= (1-\rho)\frac{s}{\lambda}\frac{L_S(s)}{L_S(s)-1+\frac{s}{\lambda}} \qquad \square$$

[Spec: Ha $S \sim Exp(\mu)$, akkor $L_S(s) = \frac{\mu}{\mu+s}$, ezt vissza-helyettesítve visszakapjuk az M/M/1 modell határeloszlásait:

$$g_N(z) = \underset{\text{HF}}{- - -} = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \Rightarrow N \sim PesszGeom(1-\rho)$$

$$L_D(s) = \underset{\text{HF}}{- - -} = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+s} \Rightarrow D \sim Exp(\mu-\lambda).$$]

Megj: $\bar{D}$-re a Little formula használatával kijött érték ellenőrizhető az L_D deriválásával, és stimmel.
A számolás nem szép, mert $\frac{0}{0}$ alakú határértékekkel kell küzdeni.
[kicsit könnyebb L_W-ből $\bar{W}$, de a fő nehézség megmarad.]