Erlang probléma = M/M/N/N modell (többek között)

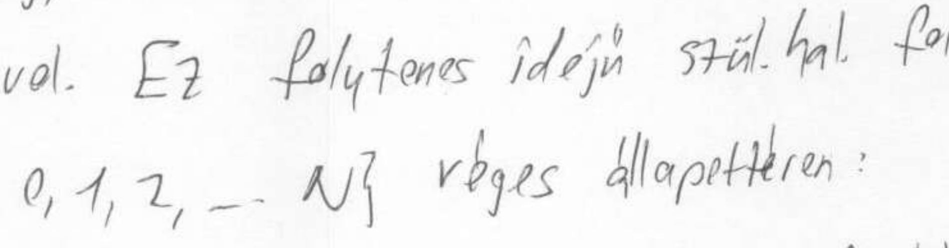
Egy telefonos ügyfélszolgálaton N ügyintéző ül.
A hívások λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek.

Ha van szabad ügyintéző, akkor 1 (valamelyik) fogadja a hívást, és az előzményektől független $Exp(\mu)$ idő alatt „kiszolgálja" az ügyfelet.

Ha nincs szabad kiszolgáló, akkor a hívás elvész:
sorba állni nem lehet.

[Megj: A modellt eredetileg telefonközpont modellezésére használták, ami legfeljebb N hívást tud egyszerre továbbítani.]

Legyen $N(t)$ a foglalt ügyintézők száma t idő elteltével. Ez folytonos idejű szül.-hal. folyamat a $\{0, 1, 2, \ldots N\}$ véges állapottéren:



FIGYELEM: A $k \to k-1$ ugrás rátája nem μ, hanem $k\mu$, mert a k db éppen beszélő ügyintéző közül $k \cdot \mu$ rátával véget $\boxed{\text{valamelyik}}$

Stabilitás: Persze mindig stabil, mert véges állapotterű és irreducibilis.

Stac. eloszlás: a szül. hal. folyamat ugrási rátáiból

$$\Pi_k = \frac{\lambda}{k\mu}\Pi_{k-1} = \frac{\tilde{\varsigma}}{k}\Pi_{k-1},\ k=1,2,\dots,N, \qquad \boxed{\tilde{\varsigma} := \frac{\lambda}{\mu}}$$

amiből

$$\boxed{\Pi_k = \Pi_0 \frac{\tilde{\varsigma}^k}{k!} \qquad k = 0,1,\dots N}$$

csonkított Poisson($\tilde{\varsigma}$) eloszlás

(Jellemzően $\tilde{\varsigma} > 1$)

ahol a normáláshoz $\Pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \frac{\tilde{\varsigma}^k}{k!}}$, erre nincs szép zárt képlet.

Veszteséghányad: Most is azok az ~~igények~~ hívások vesznek el, amik akkor jönnek, amikor tele van a „sor", vagyis a hívások $\Pi_N = \frac{\tilde{\varsigma}^N/N!}{\sum_{k=0}^{N} \tilde{\varsigma}^k/k!}$ hányada

(pont mint az M/M/1/N sorhál).

Üresjárat: Most is az idő $\Pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} \tilde{\varsigma}^k/k!}$ hányadában üres a rendszer $\Longrightarrow$ az idő ekkora hányadában unatkozik minden ügyintéző. Ám nem ez az érdekes.

Üresjárat, jobb kérdés:

Az üzemeltetőt inkább az érdekli, hogy az ügyintézők az össz idejük mekkora részét töltik ~~m~~munkával ill. malmozással: 3/6

T idő alatt eltelik összesen $T \cdot N$ munkaidő: ebből mennyi telik munkával?

Válasz: ~~min~~ stac. esetben minden pillanatban átlagosan ~~N~~

$$\bar{N} = \mathbb{E}\, N_{stac} = \sum_{k=0}^{N} k\pi_k \text{ ügyintéző dolgozik}$$

$\Rightarrow$ hosszú távon TN össz-munkaidőből $T\bar{N}$ telik munkával

és $TN - T\bar{N}$ unalommal

$\Rightarrow$ a kifizetett munkabér $\frac{T\bar{N}}{TN} = \frac{\bar{N}}{N}$ része „hasznosul"

és $\boxed{1 - \frac{\bar{N}}{N} \text{ része az „~~veszteség~~ üresjárat"}}$-ból adódó veszteség.

Számolás: $$\boxed{\bar{N} = \sum_{k=0}^{N} k\pi_k = \sum_{k=0}^{N} \pi_0 \frac{\tilde{\rho}^k}{k!}\cdot k \underset{\substack{k \geq 1\text{-re} \\ \text{lehet} \\ \text{egyszerűsíteni}}}{\overset{k=0\text{-ra kell}}{=}} \sum_{k=1}^{N} \pi_0 \frac{\tilde{\rho}^k}{(k-1)!} \overset{l=k-1}{=}}$$

$$= \pi_0 \tilde{\rho} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\tilde{\rho}^l}{l!} = \pi_0 \tilde{\rho}\left(\frac{1}{\pi_0} - \frac{\tilde{\rho}^N}{N!}\right) = \boxed{\tilde{\rho}(1 - \pi_N)}$$

Figyelem: ezekben a képletekben $\tilde{\varrho} = \frac{\lambda}{\mu}$ azt mutatja, hogy az érkező ~~igén~~ hívások intenzitása hányszorosa annak, amit egy ügyintéző bír.

4/6

~~A~~ Ezzel szemben a kihasználtsági tényező

$$\varrho = \frac{\lambda}{N\mu} = \frac{\tilde{\varrho}}{N} \quad, \text{amivel}$$

$$\boxed{\frac{\tilde{N}}{N} = \frac{\tilde{\varrho}\,(1-\Pi_N)}{N} = \varrho\,(1-\Pi_N)}$$

[Hát persze:

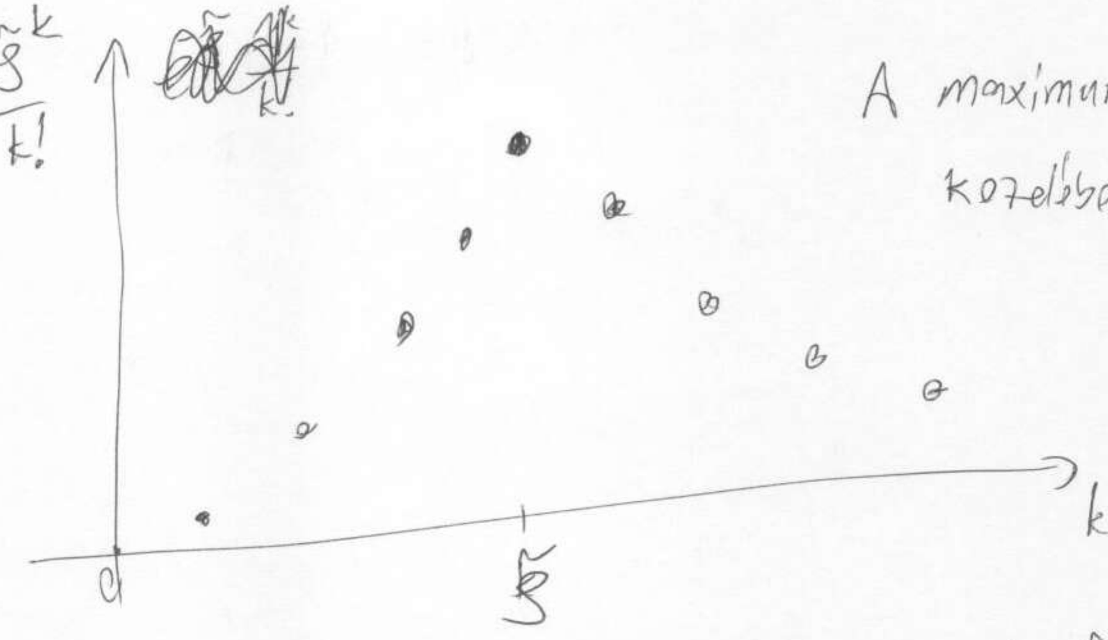
hasznosan kihasznált kapacitás-hányad = kihasználtsági tényező $\cdot$ (1 − veszteség-hányad)]

Mi kell ahhoz, hogy ~~a~~ a veszteséghányad kicsi legyen?

1.) ~~A~~ Nyilván $\Pi_N \geq \frac{\varrho - 1}{\varrho}$ (ha a képletből nem is látszik első ránézésre): Ha $\varrho > 1$, akkor az ügyintézők úgy se bírnák ~~a~~ a tempót, ha sose lenne üresjárat (pedig van), ~~e~~ és T idő alatt ~~az~~ az $NT\varrho$ időre elegendő feladatból $NT\varrho - NT = NT(\varrho - 1)$ elkerülhetetlenül elvégzetlen maradna — vagyis a hívások $\frac{\varrho-1}{\varrho}$ hányada.

$\Rightarrow$ kell, hogy ~~$\varrho<1$~~ $\varrho = \frac{\tilde{\varrho}}{N} < 1$, vagy legalább $\varrho = \frac{\tilde{\varrho}}{N} \approx 1$ legyen, vagyis $N \approx \tilde{\varrho}$ alsó hangon (hát persze).

2.) ~~Ha~~ Hogy néz ki a $\mathrm{Poi}(\tilde{\varrho})$ eloszlás?



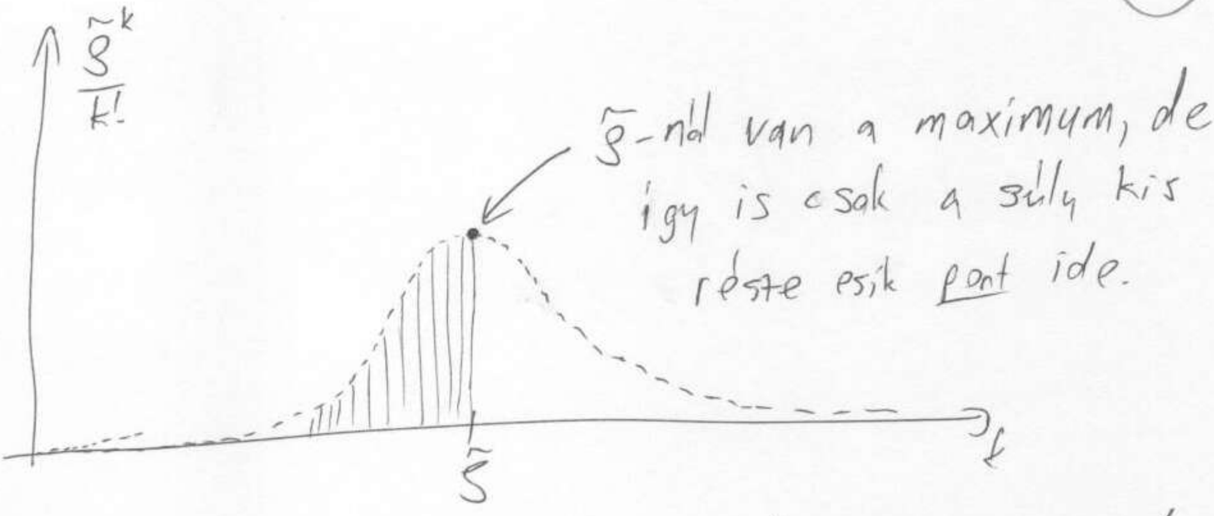
A maximum $\tilde{\varrho}$ közelében van

$\Rightarrow$ (9.) ha $\tilde{\varrho}$ nem nagyon nagy, akkor $N = \tilde{\varrho}$ nem elég: Pl $\tilde{\varrho}=5$, $N=5$ esetén $\varrho=1$, de $\Pi_5 > \frac{1}{6}$ ránézésre is (igazából $\Pi_5 \approx 0.28$).

Ilyenkor $N \gg \tilde{\varrho}$ kell, vagyis $\varrho = \frac{\tilde{\varrho}}{N} \ll 1$

$\Rightarrow \frac{\bar{N}}{N} = \varrho(1-\Pi_N) \ll 1$: a kapacitás döntő része elkerülhetetlenül pocsékba megy.

6.) Ha $\tilde{\varrho}$ nagy, a helyzet nem ilyen rossz:



[Higgyjétek el: Ha $\tilde{\varrho}$ nagy és $N \approx \tilde{\varrho}$, vagyis $\varrho \approx 1$, akkor $\Pi_N \approx \sqrt{\frac{2}{\pi N}}$, pl. $\varrho = N = 1000$-re $\Pi_N \approx 0.01$.

Ha $\tilde{\varrho}$ nagy és $N > \tilde{\varrho} + 5\sqrt{\tilde{\varrho}}$, akkor $\Pi_N < 10^{-6}$.

[Pl. ha $\tilde{\varrho} = 1000$, akkor $N = 1160$ bőven elég.]

[Indoklás: Centrális határeloszlás tétel, Stirling formula.]]

Tanulság: Érdemes az ügyfélszolgálatokat összevonni.