Az M/M/1 modell

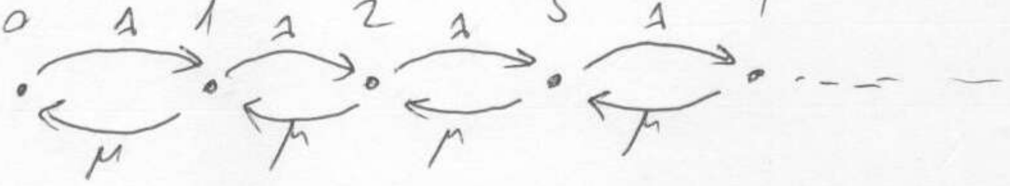
1 kiszolgáló

Markov érkezés Markov kiszolgálás

Igények érkeznek az 1etlen kiszolgálóhoz λ intenzitású Poi-folyamat szerint, és beállnak a sorba. A kiszolgálásuk független $\sim Exp(\mu)$ időt vesz igénybe

$N(t) :=$ a sorhossz t-kor.

Ez jól láthatóan folytonos idejű születési-halálozási folyamat:



Stabilitás, sorhossz, üresjárat

Legyen $N(t)$ stac. eloszlása $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots)$. Mivel $N(t)$ szül. hal. folyamat, $\pi_{k+1} = \pi_k \frac{\lambda}{\mu} \overset{\text{Emlékezz:}}{=\!=\!=} \pi_k \varrho$,

$\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ a kihasználtság

amiből $\pi_k = \pi_0 \varrho^k$, és a rendszer pontosan akkor stabil, ha az normálható, vagyis $\boxed{\varrho < 1} \Longleftrightarrow \boxed{\lambda < \mu}$ – hát persze.

Ekkor $\pi_k = \text{const}\, \varrho^k$ $(k=0,1,2\ldots)$, amiből

~~$N^{stac} \sim$~~ ~~Π = [illegible] $(1-\varrho)$~~ , ~~$\pi_k = (1-\varrho)\varrho^k$ $k=0,1,\ldots$~~

$\boxed{N^{stac} \sim \Pi = \text{PesszGeom}(1-\varrho)}$ $\quad \Pi_k = (1-\varrho)\varrho^k \quad k=0,1,\ldots$

Ebből

$\boxed{\mathbb{P}(\text{üresjárat}) = \mathbb{P}(N^{stac}=0) = \Pi_0 = \underline{1-\varrho}}$ (hát persze),

$$\boxed{\overline{N} = \mathbb{E}(N^{stac}) = \frac{1}{1-\varrho} - 1 = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$$

Veszteséghányad persze nincs, mert a sorhosszra nincs korlát.

Sorhossz a kiszolgáló és az igények szemszögéből

Legyen

A_n a sorhossz az n-edik igény $\boxed{\text{kiszolgálása}}$ $\boxed{\text{után}}$ közvetlenül

A_n^- —— || —— $\boxed{\text{előtt}}$ – || –,

Így persze $A_n^- = A_n + 1 \geq 1$

B_n a sorhossz az n-edik igény $\boxed{\text{érkezése}}$ $\boxed{\text{után}}$ közvetlenül

B_n^- —— || —— – || – $\boxed{\text{előtt}}$ közvetlenül

Így persze $B_n \geq 1$, $B_n^- = B_n - 1$.

Ezek is Markov láncok (diszkrét időben), de az időfejlődésük bonyolultabb, mint $N(t)$-é: ők nem szül.-hal. folyamatok: tetszőlegesen nagy ugrások lehetségesek.

Szerencsére egyelőre nem kell megérteni az evolúciójukat: a stac. eloszlásukat ki tudjuk találni az $N(t)$ stac. eloszlásából.

Kulcs-észrevétel 1: Mivel a rendszer Markov, az, hogy t és $t+\Delta t$ között érkezik-e igény, független attól, hogy t-ig mi történt — így $N(t)$-től is. Ezért ha T nagyon hosszú idő, akkor

- T idő alatt kb $T\Pi_k$ időt töltünk a k állapotban
- ezért kb $T\Pi_k \cdot \lambda$ ugrás történik a $\textcircled{k} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{k+1}$ élen
  $(k=0,1,2,\dots)$
- vagyis összesen $\sum_{k=0}^{\infty} T\Pi_k\lambda = T\lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\Pi_k}_{1} = T\lambda$ ugrás történik felfelé (hát persze, T idő alatt $T\lambda$ darab igény érkezik).

Vagyis az érkező $T\lambda$ db igény

$\frac{T\Pi_k\lambda}{T\lambda}=\Pi_k$ hányada érkezik úgy, hogy előtte pont k volt a sorhossz

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B^-_{stac}=k)=\Pi_k \Rightarrow \boxed{B^-_{stac}\sim\Pi=\text{PesszGeom}(1-\varrho)}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{stac}=B^-_{stac}+1\sim \text{Geom}(1-\varrho)}$$

Megj: Az érvelés könnyen tehető teljesen precízzé: ha a rendszer stacionárius, akkor T idő alatt

$\mathbb{E}$(k-ban eltöltött idő) $= T\pi_k$ (nem csak $\approx$, hanem $=$)

$\mathbb{E}$($ⓚ \xrightarrow{\lambda} (k+1)$ ugrások száma) $= T\pi_k \lambda$ (nem csak $\approx$)

Kulcs-észrevétel 2:

Mivel $N(t)$ egyszerre csak 1-et léphet fel/le (szül. hal. folyamat), hosszú távon ugyanannyi ugrás történik a $ⓚ \xrightarrow{\lambda} (k+1)$ élen, mint a $ⓚ \xleftarrow{\mu} (k+1)$ élen $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ugyanannyiszor lesz a sorhossz k közvetlenül egy érkezés ~~után~~ előtt, mint közvetlenül egy ~~érkezés~~ kiszolgálás után.

Ezért $\boxed{A_{stac} \sim B^-_{stac} \sim \text{Pessz Geom}(1-\varrho)}$

és ugyanígy $\boxed{A^-_{stac} \sim B_{stac} \sim \text{Geom}(1-\varrho)}$

Ezekből persze

$$\bar{A} := \mathbb{E}A_{stac} = \bar{B^-} := \mathbb{E}B^-_{stac} = \frac{1}{1-\varrho} - 1 = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$\bar{A^-} := \mathbb{E}A^-_{stac} = \bar{B} := \mathbb{E}B_{stac} = \frac{1}{1-\varrho} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$$

Várakozási idő, késleltetés – várható értékben

Legyen W_n az n-edik igény várakozási ideje – vagyis az érkezésétől a sorra kerüléséig eltelt idő,

D_n pedig a késleltetése – vagyis az érkezésétől a távozásáig eltelt idő

pont úgy, mint diszkrét időben volt.

Persze $$D_n = W_n + \underset{\uparrow\text{ kiszolgálási idő,}}{S_n}$$

ezért $\bar{D} = \bar{W} + \mathbb{E}S = \bar{W} + \frac{1}{\mu}$.

Stabil esetben $\bar{D}$-re ugyanúgy érvényes a **Little formula**, mint diszkrét időben volt (és a bizonyítás is nagyon hasonlóan megy):

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} D_n \xrightarrow[1\text{ vsz.séggel}]{N\to\infty} \boxed{\bar{D} = \bar{N}\,\overset{\text{érkezési idő}}{\overset{\downarrow}{\mathbb{E}T}} = \cancel{N}\frac{\bar{N}}{\underset{\text{érkezési intenzitás}}{\lambda}}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\mu-\lambda}}$$

amiből $$\boxed{\bar{W} = \bar{D} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\,\frac{1}{\mu-\lambda}}$$

Várakozási idő és késleltetés eloszlása – stacionárius esetben

Amikor az n-edik igény megérkezik, B_n^- darab igényt talál maga előtt a sorban (ami persze véletlen), ő maga a B_n-edik. Legyen ezen (sorban talált) igények kiszolgálási ideje

$$\begin{array}{ccccc} \tilde S_1, & \tilde S_2, & \tilde S_3, & \dots, & \tilde S_{B_n} \\ \| & & & & \| \\ S_{n-B_n+1}, & & \dots & , S_{n-1}, & S_n \end{array}$$

Így $W_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{B_n^-} \tilde S_i}_{\text{az előtte állókat ki kell szolgálni}}$, $D_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{B_n} \tilde S_i}_{\text{az előtte állókat és őt magát is ki kell szolgálni}}$

EZ CSAK FIFO KISZOLGÁLÁS ESETÉN IGAZ

[Pontosabban: a legelöl álló igény kiszolgálása már elkezdődött, ezért $\tilde S_1$ legyen az abból hátra lévő idő — de egy exponenciális eloszlásnak ez mindegy.]

Ezek véletlen tagszámú összegek: $\tilde S_i \sim Exp(\mu)$

független azonos eloszlásúak és függetlenek B_n-től is, mert B_n csak a múlttól függ.

Köv.: a $\boxed{\text{stacionárius esetben}}$

$D_n = \sum_{i=1}^{B_n} \tilde{S}_i$ véletlen tagszámú összeg ahol

$\tilde{S}_i \sim Exp(\mu)$, $B_n \sim Geom(1-\varrho)$.

Ez pont az $\boxed{\text{exponenciális eloszlás ritkítása}}$

$$\Rightarrow \boxed{D_n \sim Exp\big((1-\varrho)\mu\big) = Exp(\mu-1)}$$

[Megj: Akit nem győzött meg a Little formula, az most ellenőrizheti, hogy $\bar{D} = \mathbb{E}\, Exp(\mu-1) = \frac{1}{\mu-1}$]

A várakozási idő kicsit csúnyább: ott csak Pessz Geom(1-ϱ) db exponenciálist kell összeadni, ami lehet nulla.

(Hát persze: megesik, hogy érkezéskor üres a sor.)

Megoldás 1: a $W_n = \sum_{i=1}^{B_n^-} \tilde{S}_i$, $\tilde{S}_i \sim Exp(\mu)$, $B_n^- \sim Pessz\,Geom(1-\varrho)$ véletlen tagszámú összegnek is ki tudjuk számolni a Laplace transzformáltját, abból látszik az eloszlás. HF.

Megoldás 2: A $B_n^- \sim Pessz\,Geom(1-\varrho)$ sorhossz felfogható úgy, hogy B_n^-

$$\begin{cases} (1-\varrho) \text{ val.séggel nulla} \\ \text{a maradék } \varrho \text{ val.séggel } \cancel{\sim Geom(1-\varrho)} \\ \qquad \sim Geom(1-\varrho) \end{cases}$$

Így a stac. esetben W_n eloszlása generálható így, hogy

- Feldobunk egy hamis érmét, amin a <u>fej</u> val.sége <u>$1-\varrho$</u>.
- Ha fej, akkor $W_n := 0$
- Ha Írás, akkor $W_n = \sum_{i=1}^{Geom(1-\varrho)} \tilde{S}_i \sim Exp(\overbrace{(1-\varrho)\mu}^{\mu-\lambda})$.

<u>Megj:</u> Így W_{stac} eloszlása se nem diszkrét, se nem folytonos: egy diszkrét és egy folytonos eloszlás keveréke. Nevezhetjük mondjuk „hiányos exponenciális" eloszlásnak. Nincs neki sem diszkrét eloszlása, sem sűrűségfüggvénye, de van eloszlásfüggvénye:

$$\mathbb{P}(W_{stac} \leq x) = \begin{cases} 0, \text{ ha } x<0 \\ 1-\varrho, \text{ ha } x=0 \\ 1-\varrho+\varrho\left(1-e^{-(\mu-\lambda)x}\right), \text{ ha } x>0 \end{cases}$$

$$= 1-\varrho\, e^{-(\mu-\lambda)x}$$