Folytonos idejű sorbanállási modellek

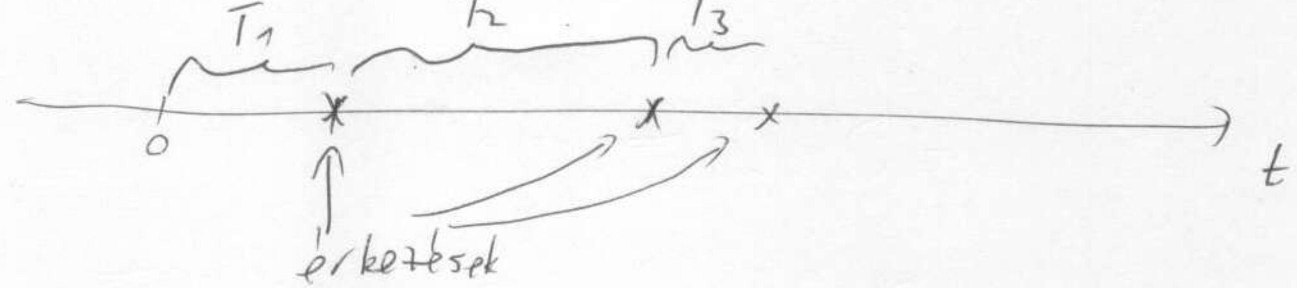
Egy kiszolgáló rendszerbe igények érkeznek egyesével:

$T_1 :=$ az 1. igény érkezési ideje

$T_2 :=$ a 2. — // — az elsőtől számítva

$T_3 :=$ a 3. — // — a 2.-tól — // —

stb



~~$T_1, T_2, \ldots \in [0,\infty)$ val. változók~~

Az egyes igények kiszolgálásához szükséges idők legyenek $S_1, S_2, S_3 \ldots$ – persze onnantól számítva, hogy a kiszolgálása elkezdődik („sorra kerül").

Ez eddig ugyanaz, mint amit diszkrét időben néztünk, csak most $T_1, T_2, T_3 \ldots, S_1, S_2, S_3 \ldots \in [0,\infty)$ val. változók nem (feltétlenül) egész értékűek (hanem tipikusan folytonosak).

[Lehet az is, hogy a folyamatot nem csak $t \in [0,\infty)$-re, hanem $t \in \mathbb{R}$-re nézzük, így $T_0, T_{-1}, T_{-2}, \ldots, S_0, S_{-1}, S_{-2} \ldots$ is van. Nem nagy plusz nehézség.]

A rendszerben $m \geq 1$ db kiszolgáló egység van (pl. jegypénztári ablak). Ha ezek valamelyike véget egy igény kiszolgálásával, azonnal elkezd egy következőt (már ha éppen van olyan, amelyik sorban áll).

A rendszer befogadóképessége $K \geq 1$: legfeljebb ennyi igény lehet a rendszerben — beleértve azokat is, akik már kiszolgálás alatt állnak.

!! Én a rendszerben lévők számát sorhossznak fogom
!! nevezni. Ne értse félre senki: van, aki ~~?~~ különb-
!! séget tesz a
- kiszolgáló egységekben lévők száma
- ~~sorban áll~~ kiszolgálás alatt még nem lévő, várakozó igények száma
- az összes bent lévő igény száma

!! között. Nálam a „sorhossz" ezt jelenti.

FELTEVÉSEK Tegyük fel, hogy

1. T_1, T_2, T_3 -- független és azonos eloszlású, $\sim T$

Ezt úgy is mondják, hogy az igények „felújítási folyamat" szerint érkeznek.

(2) $S_1, S_2, S_3 \dots$ is független, azonos eloszlású $\sim S$ 3/6

és független a $\{T_1, T_2, T_3 \dots\}$-től is

[Ha nem $t=0$-kor és/vagy nem üres kiszolgálókkal indítjuk a rendszert, fel kell tenni, hogy az S_i-k és T_i-k a teljes múlttól függetlenek.]

(3) Ha a rendszer tele van és egy új igény érkezik, akkor az elvész.

(4) Ha kell, feltesszük, hogy a kiszolgálás érkezési sorrendben történik: FIFO = „first in, first out", vagy pontosabban FCFS = „first come, first serve" rendszer.

[Ha több kiszolgáló egység is van, megeshet, hogy aki hamarabb érkezett, azt hamarabb kezdjük kiszolgálni, mégis később végzünk vele.]

Ez a feltevés az eredmények többségéhez nem kell, de a várakozási idő és a késleltetés eloszlásához igen. [A valóságban persze nagyon is vannak nem FCFS rendszerek.]

<u>Kendall-féle jelölés</u> a kiszolgáló rendszerekre:

$$\underbrace{\text{érkezési idők eloszlása}} \,/\, \underbrace{\text{kiszolgálási idők eloszlása}} \,/\, \underbrace{\text{kiszolgáló egységek száma}}_{\geq 1} \,/\, \underbrace{\text{befogadóképesség}}_{\text{ha } \infty \text{, nem írjuk ki}}$$

Ez lehet • M, ha <u>exponenciális</u> az eloszlás
(M mint „Markov")
• D, ha determinisztikus, pl. $T \equiv 1$ vagy $S \equiv 1$
• G, ha nem teszünk fel róla semmit
(G mint „General")

[<u>Megj</u>: A Kendall-féle jelölést lehetne bonyolítani olyan esetekkel, amikor az érkezés nem felújítási folyamat szerint történik (pl. csak véges sok lehetséges igényforrás van
vagy
• a kiszolgálási idők nem függetlenek,
de mi nem bonyolítjuk.]

<u>További jelölések</u>: • $\lambda := \frac{1}{\mathbb{E}T}$ az érkezési folyamat intenzitása

[Ez stimmel, ha $T \sim Exp(\lambda)$, de akkor is használjuk, ha T egyéb eloszlású]

- $\mu := \frac{1}{\mathbb{E}S}$ a kiszolgálás intenzitása

  (kiszolgáló egységenként, már amikor van mit kiszolgálni)

- $\varrho := \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{\mathbb{E}S}{\mathbb{E}T}\cdot\frac{1}{m}$ a kihasználtsági tényező

ahol m a kiszolgáló egységek száma

- $C := \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\, S}}{\mathbb{E}S}$ a kiszolgálási idő <u>relatív</u> szórása

  [Ki fog derülni, hogy ez érdekes. Persze ha $S \sim \mathrm{Exp}(\mu)$, akkor $C = \frac{1/\mu}{1/\mu} = 1$.]

[<u>Megj:</u> A modellbe általában belefér, hogy $T=0$ pozitív val. séggel: ilyenkor több igény is érkezik egyszerre, de azért beszámoztuk őket; vagy $S=0$ pozitív val. séggel: ilyenkor több igény is távozhat egyszerre.]

<u>Kérdések</u>
- stabilitás
- sorhossz
  - várható értéke
  - ~~stac.~~ eloszlása

  } a stac. esetben
- sorhossz az igények szemszögéből
- ~ a kiszolgáló ~
- várakozási idő
- késleltetés

  } { várható értéke / eloszlása } stac. esetben
- üresjárat val. sége
- veszteséghányad: mennyi igény vész el.

Terv

modell		M/M/1	M/M/1/N	M/M/N/N	M/G/1	G/M/1	G/G/1
stabilitás		✓	✓	✓	✓	✓	✓
sorhossz	átlaga	✓			✓	✓	
	eloszlása	✓	✓	✓	✓	✓	
sorhossz az igények szemszögéből	átlag	✓			✓	✓	
	eloszlás	✓			✓	✓	
sorhossz a kiszolgáló szemszögéből	átlag	✓			✓	✓	
	eloszlás	✓			✓	✓	
várakozási idő	átlag	✓			✓	✓	
	eloszlás	✓			✓	✓	✓
késleltetés	átlag	✓			✓	✓	
	eloszlás	✓			✓	✓	✓
üresjárat		✓	✓	✓	✓	✓	
veszteséghányad		✓	✓	✓	✓	✓	