Diszkrét idejű Markov láncok stabilitása

Legyen $X_0, X_1, X_2 \ldots$ Markov lánc az S diszkrét (vagyis: véges v. megszámlálhatóan végtelen) állapottéren, időben homogén.
Legyen P az átmenetmátrix és $\Pi(n)$ az n időpont-beli eloszlás (sor) vektor.

<u>Tudjuk:</u> $\Pi(n+1) = \Pi(n) P$.

Vagyis persze $\Pi(n+1)$ függ $\Pi(n)$-től, ami megfelel annak, hogy X_{n+1} nem független X_n-től.

<u>Mégis, intuitív kép</u>: <u>hosszú idő alatt</u> a Markov lánc a sok véletlenség hatására <u>elfelejti a múltját</u>, ezért <u>nagy n-re</u> $\Pi(n)$ már lényegében független $\Pi(0)$-tól.

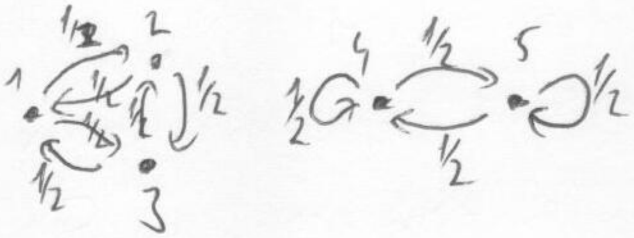
[Avagy: nagy n-re X_n lényegében független X_0-tól.]

<u>Köv</u>: <u>HA</u> <u>minden jól megy</u>, akkor $\Pi(n) \xrightarrow{n\to\infty} \Pi(\infty)$, ahol a $\Pi(\infty)$ <u>határeloszlás</u> független $\Pi(0)$-tól.

[1]: $\to$ Mi baj lehet?

<u>Válasz</u>: 2 nyilvánvaló példa, amikor baj van.

1.)



<u>Gond</u>: $\{1, 2, 3\}$ nincs összeköttetésben $\{4,5\}$-tel.

Így ha $X_0 = 1$, akkor $\pi_4(n)$ örökre 0 marad,
míg ha $X_0 = 4$, akkor $\pi_1(n)$ marad örökre nulla:
Ez a rendszer <u>nem felejti el</u> a múltját.

<u>Avagy</u>: Ez a rendszer „<u>reducibilis</u>": van benne egy kisebb állapotterű Markov lánc (igazából kettő is), ami önálló életet él.

2.)

<u>Gond</u>: páratlan állapotból csak párosba lehet ugrani és viszont.
Így ha X_0 páros, akkor X_{1000} is garantáltan páros lesz, X_{1001} viszont páratlan:
ez a rendszer <u>sem felejti el</u> a múltját.

<u>Avagy</u>: Ez a rendszer <u>periodikus</u>.

<u>Állítás</u> (lényeg röviden): Ha az S állapottér <u>VÉGES</u>, akkor <u>más baj nem is lehet.</u> Ha viszont <u>végtelen</u>, a helyzet sokkal nehezebb és <u>érdekesebb</u>.

$\boxed{?2}$: Ha minden jól megy, vajon mi lehet a határeloszlás?

Def: A π eloszlás (sor)vektor stacionárius, ha

$$\pi P = \pi$$

Avagy: A π eloszlás időben nem fejlődik: ha a Markov láncot a $\pi(0) = \pi$ eloszlásból indítjuk, örökre abban is marad: $\pi(1) = \pi(0)P = \pi P = \pi$, stb.

$\boxed{\text{FONTOS}}$: Szó sincs arról, hogy ilyenkor a rendszer állapota ne változna: X_n állandóan változik — rendszeresen bejár minden lehetséges állapotot. Ami nem változik, az az X_n eloszlása.

[A múlt órai példán: az üzletember továbbra is minden héten új városba költözik. Az állandóság abban van, hogy $\mathbb{P}$(az n-edik héten Piripócson van) minden n-re ugyanannyi.]

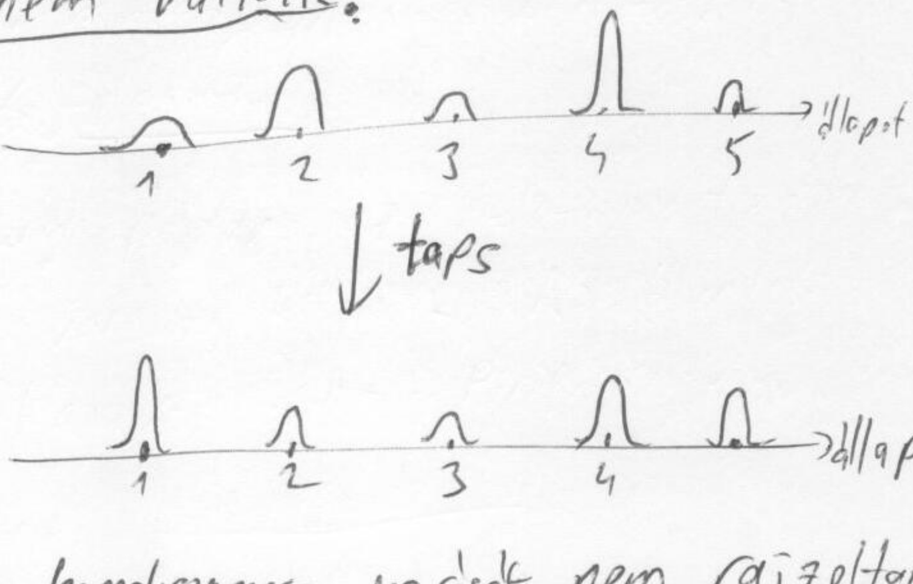
HASZNOS szemléletes kép: Az eloszlást úgy lehet elképzelni, hogy a gráf minden csúcsára letesszük 1-1 marék homokot — az egyes csúcsokra nem feltétlenül ugyanannyit — összesen 1 kg-ot. Így egy állapot súlya a rajta lévő homok ~~súlya~~ tömege kg-ban.

Az <u>állapot időfejlődését</u> úgy képzelhetjük, hogy vezény-szóra (v. tapsra) minden <u>homokszemcse</u> <u>ugrik</u>, éspedig

- egymástól teljesen függetlenül
- az ugrás végpontját a Markov átmenetmátrix szerint megválasztva.

Így a homok-kupacok átrendeződnek: az eloszlás időben fejlődik.

<u>Ha</u> a folyamat <u>stacionárius</u>, attól még persze az egyes homok<u>szemcsék</u> <u>vándorolnak</u>, csak a <u>kupacok</u> <u>mérete nem változik</u>.



[A rengeteg homokszemcse ugrását nem rajzoltam be: mindenhonnan mindenhova vezet nyíl (ha az átmenet-valószínűség pozitív).]

Nyilvánvaló: HA van határeloszlás, akkor az csak stacionárius lehet:

Ha $\exists\, \pi(\infty)$ eloszlásvektor, hogy $\pi(n) \longrightarrow \pi(\infty)$, akkor $\pi(\infty) P = \pi(\infty)$.

[Pontosabban: $\pi(n) \longrightarrow \pi(\infty)$ alatt értsük azt, hogy $\forall x \in S$-re $\pi_x(n) \xrightarrow{n\to\infty} \pi_x(\infty)$ (pontonkénti konvergencia).

Ekkor $\pi_y(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \pi_y(n+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{x\in S} \pi_x(n) P_{xy} =$

$$= \sum_{x\in S} P_{xy} \lim_{n\to\infty} \pi_x(n) = \sum_{x\in S} P_{xy}\, \pi_x(\infty) = \big(\pi(\infty) P\big)_y$$

Véges S esetén nyilvánvaló.

Ha S végtelen, akkor a $\sum$ és a lim felcserélésén lehet egy kicsit aggódni, de az állítás igaz, érdekesség nincs.]

[Ugyanez érthetőbben: $\pi(n+1) = \pi(n) P$

$$\begin{array}{ccc} \pi(n+1) & = & \pi(n) P \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \pi(\infty) & = & \pi(\infty) P \end{array}$$

ha a határérték és a P alkalmazása felcserélhető]

Ennek örömére

Def: Az X_n Markov lánc <u>stabil</u>, ha <u>pontosan egy</u> stac. eloszlása van (legyen a neve π), <u>és</u> bármely $\pi(0)$ esetén <u>$\pi(n) \to \pi$</u>.

$\boxed{?3}$: Hogyan lehet stacionárius eloszlást <u>megkeresni</u>?

<u>Válasz:</u> π stacionárius $\iff \pi P = \pi$

Ez egy mátrix-egyenlet: pl ha $S = \{1, 2, \dots, K\}$, akkor K db egyenlet a K db ismeretlenre — ezt kell megoldani.

<u>Pontosabban:</u>

- nézzük inkább a transzponáltját: $P^T \pi^T = \pi = \mathbb{1} \pi$
- és rendeztük nullára: $(P^T - \mathbb{1}) \pi^T = 0$

Most jól látszik, hogy ez egy <u>homogén lineáris egyenletrendszer</u> (K db ismeretlen, K db egyenlet).

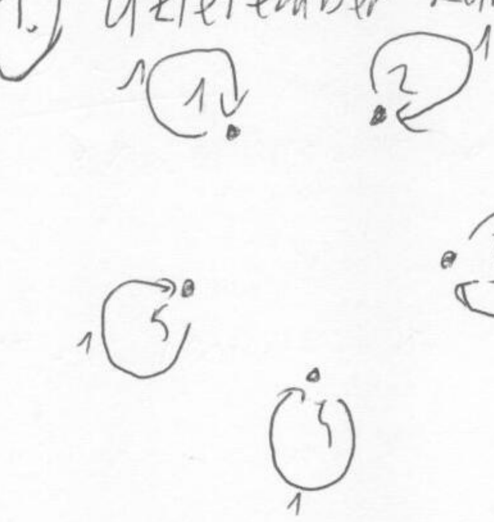
Ezért garantáltan megoldása a $\pi^T = \underline{0}$ null-vektor,
de mi nyilván nem ezt keressük.
Ha a megoldás egyértelmű lenne, bajban lennénk. pl. véges S-re

Szerencsére az érdekes esetekben (mint látni fogjuk) a megoldás nem egyértelmű: ∞ sok van belőle, és
ha π megoldás, akkor $c \cdot \pi$ is megoldás $\forall c \in \mathbb{R}$-re.
Minket az a megoldás érdekel, amelyikre $\sum_{x \in S} \pi_x = 1$.

Vagyis: → keresünk egy tetszőleges nem-nulla megoldást
→ és lenormáljuk

Példák stac. eloszlás számolására

1. Üzletember karanténban: nem megy sehová.



$$S := \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A megoldandó egyenlethez $P^T - \mathbb{1}$ kell:

$$P^T - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ az egyenlet $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$,

vagyis

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ennek nyilván <u>minden</u> vektor megoldása, azon belül minden eloszlásvektor is

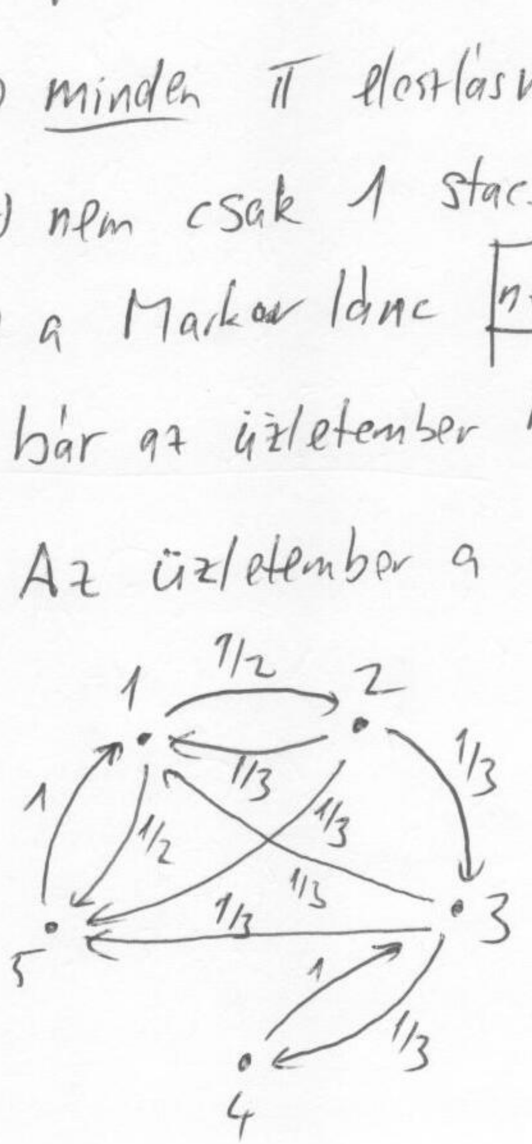
$\Rightarrow$ <u>minden</u> π eloszlásvektor stacionárius

$\Rightarrow$ nem csak 1 stac. eloszlás van

$\Rightarrow$ a Markov lánc $\boxed{\text{nem stabil}}$

(bár az üzletember helye az stabil).

(2) Az üzletember a múlt órai példából:



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ebből $P^T - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

A TRANSZPONÁLÁS

$\boxed{\text{FONTOS!}}$

az egyenletrendszer $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

, ami a szokásos „bővített mátrix" formalizmusban úgy néz ki, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 1/3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ezt <u>Gauss eliminációval</u> oldjuk meg:

[<u>Nyomatékosan</u> lebeszélek mindenkit arról, hogy az egyenleteket kézzel kiíregatva kezdjen el ismeretlenekel kifejezgetni és visszahelyettesítgetni. <u>Sokat</u> fog feleslegesen dolgozni, és <u>tutira</u> <u>el</u> fogja számolni!!]

Mielőtt nekiugrok eliminálni, előre látó módon felcserélgetem az egyenleteket és megszorozgatom konstansokkal, hogy szebb legyen a számolás. Konkrétan

- 2. egyenlet ⟶ 1. hely, (−2)-vel szorozva
- 3. —//— ⟶ 2. hely, (−3)-mal —//—
- 4. —//— ⟶ 3. hely, (−3)-mal szorozva
- 1. —//— ⟶ 4. hely, (−3)-mal szorozva
- 5. —//— ⟶ 5. hely (+6)-tal szorozva :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{-1} & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

4. sor += 3 × 1. sor

5. sor += 3 × 1. sor

Ennek segítségével lenullázom ezeket

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & -24 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

4. sor += 5 × 2. sor

5. sor += 8 × 2. sor

$\sim$

4. sor += 14 × 3. sor, 5. sor += 26 × 3. sor

— folyt. köv. oldal

$$\sim \left|\begin{matrix} -1&2&0&0&0\\0&-1&3&-3&0\\0&0&-1&3&0\\0&0&0&27&-3\\0&0&0&54&-6\end{matrix}\right|$$

Már most látszik, hogy az 5. egyenlet a 4-nek a 2-szerese, így ki fog esni, de ha ezt nem vesszük észre, akkor is kiesik:

$$\underset{\substack{4.\ \text{sor} /= (-27)\\ 5.\ \text{sor} /= 6}}{\sim} \left|\begin{matrix} -1&2&0&0&0\\0&-1&3&-3&0\\0&0&-1&3&0\\0&0&0&\boxed{-1}&1/9\\0&0&0&9&-1\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix}\left|\right. \underset{5.\ \text{sor} += 9\times 4.\ \text{sor}}{\sim}$$

ennek segítségével lenullázom ezt

$$\sim \left|\begin{matrix} -1&2&0&0&0\\0&-1&3&-3&0\\0&0&-1&3&0\\0&0&0&-1&1/9\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{matrix}\right|\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\\cancel{0}\end{matrix}\left|\right.$$

Az utolsó egyenlet $0=0$ alakú lett $\Rightarrow$ kiesett $\Rightarrow$ ~~a megoldás~~ az egyenletrendszer megoldása nem egyértelmű: HÁT PERSZE: megígértem, hogy lesz nemtriviális megoldás is, nem csak a $\pi = \underline{0}$.

Mivel 4 független egyenletünk maradt, 1 változót választhatunk szabadon, a többi 4-et visszahelyettesítéssel kapjuk egyesével:

Legyen mondjuk $\pi_5 = 9$

a 4. egyenletből $-\pi_4 + 1/9\,\pi_5 = 0$, vagyis $\pi_4 = \frac{1}{9}\pi_5 = 1$

Ez után a 3. egyenletből

$$-\pi_3 + 3\pi_4 = 0, \text{ vagyis } \pi_3 = 3\pi_4 = 3$$

ugyanígy a 2. egyenletből $\pi_2 = 3\pi_3 - 3\pi_4 = 6$

végül az 1. —//— $\pi_1 = 2\pi_2 = 12$

Köv: Az egyenletrendszer $\boxed{\text{egyik}}$ megoldása

$$\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$ a többi megoldás

ennek számszorosa.

Mivel $\sum_{x\in S} \tilde{\pi}_x = \sum_{x=1}^{5} \tilde{\pi}_x = 12+6+3+1+9 = 31 \neq 1$,

mi nem ezt keressük: az $\boxed{\text{egyetlen}}$ stac. $\boxed{\text{eloszlás}}$ vektor

$$\boxed{\pi = \frac{1}{31}\cdot\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{12}{31} & \frac{6}{31} & \frac{3}{31} & \frac{1}{31} & \frac{9}{31} \end{pmatrix}}$$

[HF ellenőrizni, hogy valóban $\pi P = \pi$]

Megjegyzések (1) Az eliminációt lehet folytatni, hogy a főátló fölött is csupa nulla legyen (és így az egyenletek még egyszerűbbek legyenek), de nem érdemes: a visszahelyettesítés kevesebb számolás.

Megj. 2 : Ha valaki a P-t elfelejti transzponálni, és $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$ helyett $(P - \mathbb{1})\pi^T = 0$ -t oldja meg, a konstans vektort fogja kapni: hát persze,

$$(P-\mathbb{1})\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} - \mathbb{1}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \underline{0}$$, mert P-ben

minden sorösszeg 1.

Megeshet, hogy a valódi $(P^T - \mathbb{1})\pi^T$ egyenlet megoldása is konstans vektor (vagyis a stac. eloszlás egyenletes), éspedig pontosan akkor, ha P-ben (valószínűségből) minden oszlopösszeg is 1.

Az ilyen P mátrix neve bisztochasztikus mátrix.

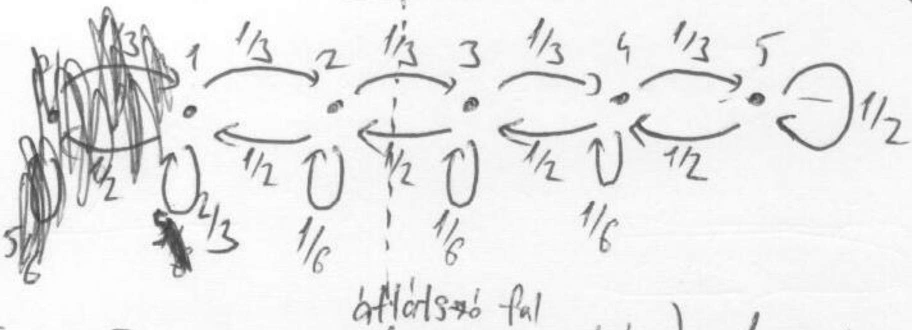
Megj. 3 Lin. alg. nyelven: az $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ vektor mindig jobboldali sajátvektora P-nek a $\lambda = 1$ sajátértékhez, vagyis

$$P\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$ mert P-ben minden sorösszeg 1.

Ezzel szemben a π stac. eloszlás a P mátrix baloldali sajátvektora, ugyancsak $\lambda = 1$ sajátértékhez:

$$\pi P = \lambda \pi .$$

③-as példa stac. eloszlásra: születési-halálozási folyamat:



Megoldhatnánk $(P^T-\mathbb{1})\pi^T = 0$-t is (nem nehéz), de van egy könnyebb ~~megold~~ módszer π keresésére:

- Képzeljük az eloszlás időfejlődését mint homok-kupacok változását / homokszemcsék ugrálását — lásd 4. oldal.
- Képzeljünk egy láthatatlan falat a 2. és 3. állapot közé.

Amikor tapsolunk, ezen a falon balról jobbra átugrik

$$\pi_2 \cdot P_{23} \overset{\text{jelen pl.}}{=} \pi_2 \cdot \frac{1}{3} \quad \text{kg homok:}$$

ennyi homok van a 2. kupacban

ekkora hányada ugrik jobbra.

Ugyanakkor ugyanezen a falon jobbról balra átugrik

$$\pi_3 \cdot P_{32} \overset{\text{jelen pl.}}{=} \pi_3 \cdot \frac{1}{2} \quad \text{kg homok:}$$

ennyi homok van a 3. kupacban

ekkora hányada ugrik balra.

Ha π stacionárius – vagyis a kupacok mérete nem változik – akkor ezeknek $=$-nek kell lenni, mert másképpen nem kerülhet homok a fal egyik oldaláról a másikra.

[FIGYELEM!! KIHASZNÁLTUK, hogy a Markov láncunk SZÜLETÉSI-HALÁLOZÁSI FOLYAMAT!!]

Vagyis $\pi_2 \cdot \frac{1}{3} = \pi_3 \cdot \frac{1}{2}$, avagy $\frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$

Ugyanilyen megfontolásból
$$\left.\begin{aligned} \pi_1 \div \pi_2 &= \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2} \\ \pi_2 \div \pi_3 &= \frac{3}{2} \\ \pi_3 \div \pi_4 &= \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2} \\ \pi_4 \div \pi_5 &= \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$
Ezek az egyenletek konstans szorzó erejéig meghatározzák π-t.

Pl $\pi_5 := 16$ választással

$\pi_4 = \frac{3}{2}\pi_5 = 24$

$\pi_3 = \frac{3}{2}\pi_4 = 36$

$\pi_2 = \frac{3}{2}\pi_2 = 54$

$\pi_1 = \frac{3}{2}\pi_2 = 81$

$\Rightarrow \tilde{\pi} := (81 \quad 54 \quad 36 \quad 24 \quad 16)$ majdnem jó, csak le kell normálni:

$81+54+36+24+16 = 211$

$\Downarrow$

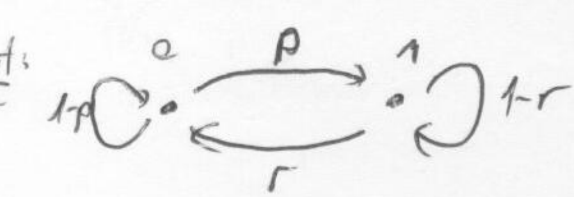
$$\boxed{\pi = \frac{1}{211}\tilde{\pi} = \left(\frac{81}{211} \quad \frac{54}{211} \quad \frac{36}{211} \quad \frac{24}{211} \quad \frac{16}{211}\right)}$$ az egyetlen stac. eloszlás.

Ugyanez általánosan:

Tétel: Ha X_n ~~sto~~ születési-halálozási folyamat az $S=\{0,1,2,\dots\}$ állapottéren P átmenetmátrix-szal és π stac. eloszlása X_n-nek, akkor

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i} \qquad i=0,1,2,3\dots\text{-re.}$$

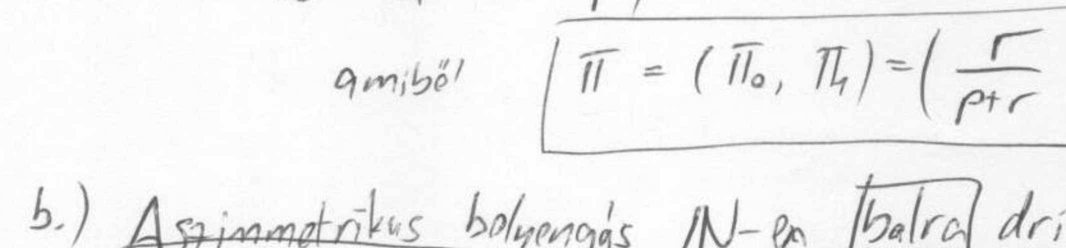
Pl: a.) ON/OFF folyamat:



$\pi_0 : \pi_1 = r : p$,

amiből $\boxed{\pi = (\pi_0, \pi_1) = \left(\frac{r}{p+r} \quad \frac{p}{p+r}\right)}$

b.) Aszimmetrikus bolyongás $\mathbb{N}$-en balra drifttel:



minden i-re $\pi_i : \pi_{i+1} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, vagyis $\pi_{i+1} = \frac{1}{2}\pi_i$

Pl $\pi_0 := c$ választással

$\pi_0 = c$

$\pi_1 = \frac{c}{2}$ $\qquad \pi = c\left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \dots\right)$

$\pi_2 = \frac{c}{4}$

$\vdots$

$\pi_k = \frac{c}{2^k}$

MÉRTANI SOR ÖSSZEGE: $1+q+q^2+q^3+\dots = \frac{1}{1-q}$, ha $|q|<1$

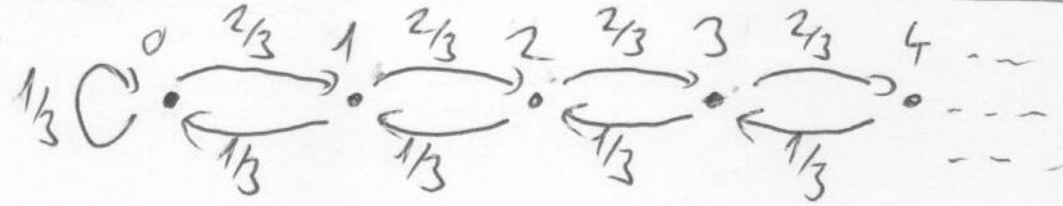
Mivel $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$,

ezért ez a π akkor lesz eloszlás, ha $\underline{c=\frac{1}{2}}$.

Vagyis az egyetlen stac. eloszlás a

$$\Pi = \left(\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{16}\ \ ---\right)$$

c.) <u>Aszimmetrikus bolyongás $\mathbb{N}$-en $\boxed{\text{jobbra}}$ drifttel:</u>



minden i-re $\Pi_i \div \Pi_{i+1} = \frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ vagyis $\Pi_{i+1} = 2\Pi_i$

Pl $\Pi_0 := c$ választással $\Pi_1 = 2c$, $\Pi_2 = 4c$, -- $\Pi_k = 2^k c$

$$\Pi = c(1\ \ 2\ \ 4\ \ 8\ ---)$$

Mivel $1+2+4+8+\ldots = \infty$, ezért a c-t <u>NEM LEHET</u> úgy megválasztani, hogy $\sum_i \Pi_i = 1$ legyen

$\Rightarrow$ ennek a folyamatnak <u>NINCS STAC. ELOSZLÁSA</u>.

<u>Ugyanez általában:</u>

<u>Tétel</u> (végtelen állapotterű szül-hal folyamat stac. eloszlása)

Legyen X_n születési-halálozási folyamat az $S = \mathbb{N}$ állapottéren. Tegyük fel, hogy $\forall i = 0, 1, \ldots$ -e $P_{i,i+1} > 0$ és $P_{i+1,i} > 0$. [Vagyis minden szomszédba való ugrás megengedett, vagyis mindenhonnan mindenhova el lehet jutni. Vagyis S irreducibilis.] Az X_n-nek akkor és csak akker van stacionárius eloszlása, ha a

$$\tilde{\Pi}_0 := 1$$

$$\tilde{\Pi}_{i+1} := \tilde{\Pi}_i \frac{P_{i,i+1}}{P_{i+1,i}} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

rekurzív szabállyal definiált sorozatra $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \tilde{\Pi}_i < \infty$,

vagyis c megválasztható úgy, hogy $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c\tilde{\Pi}_i = 1$ legyen.

Ez esetben az egyetlen stac. eloszlás $\Pi = c\tilde{\Pi}$.

Állapotok osztályozása

Láttuk: stabilitás szempontjából gondot okozhat, ha nem lehet mindenhonnan mindenhova eljutni. Ezért:

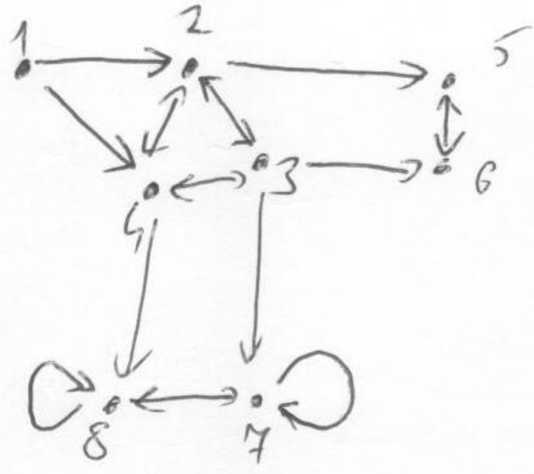
Legyen $X_0, X_1, \ldots$ időben homogén Markov lánc az S állapottéren P átmenet mátrixszal.

Def: Legyen $x, y \in S$ két állapot. y elérhető x-ből, ha van (véges hosszú) út x-ből y-ba csupa pozitív val. ségű átmenettel: $\exists\, n \in \mathbb{N}$ és $x = x_0, x_1, x_2 \ldots x_n = y$, hogy $P_{x_k, x_{k+1}} > 0$ minden k-ra.

Jelölés: $x \rightsquigarrow y$

Konvenció: $n = 0$ is jó, így $x \rightsquigarrow x$: önmagából mindenki elérhető.

Pl:



$1 \rightsquigarrow 5$, $5 \not\rightsquigarrow 1$

$2 \rightsquigarrow 7$, $7 \not\rightsquigarrow 2$

$1 \rightsquigarrow 1$, (hiába lépünk el 1-ből azonnal örökre)

$7 \rightsquigarrow 8$, $8 \rightsquigarrow 7$

Def: $x, y \in S$ kommunikál, ha $x \rightsquigarrow y$ és $y \rightsquigarrow x$.

~~Pl: $1 \leftrightsquigarrow 1$, $1 \not\leftrightsquigarrow 5$, 7~~

Jelölés: $x \leftrightsquigarrow y$.

Pl: $1 \leftrightsquigarrow 1$, $1 \not\leftrightsquigarrow 5$, $7 \leftrightsquigarrow 8$.

Az előző konvenció miatt $x \leftrightsquigarrow x$: önmagával mindenki kommunikál.

Tétel (nyilvánvaló): A $\leftrightsquigarrow$ reláció

- reflexív: $\forall x \in S \quad x \leftrightsquigarrow x$
- szimmetrikus: $\forall x, y \in S$-re ha $x \leftrightsquigarrow y$, akkor $y \leftrightsquigarrow x$
- tranzitív: $\forall x, y, z \in S$-re ha $x \leftrightsquigarrow y$ és $y \leftrightsquigarrow z$, akkor $x \leftrightsquigarrow z$.

Vagyis „$\leftrightsquigarrow$" egy $\boxed{\text{ekvivalencia-reláció}}$

Köv.: Az állapotok kommunikáló osztályokba sorolhatók:

2 állapot akkor és csak akkor kerül ugyanabba az osztályba, ha kommunikálnak.

Pl.: a fenti esetben az osztályok

$C_1 := \{1\}$

$C_2 := \{2, 3, 4\}$

$C_3 := \{5, 6\}$

$C_4 := \{7, 8\}$

Def: Az S állapottér irreducibilis, ha egyetlen osztályból áll, vagyis $\forall x, y \in S$-re $x \leftrightarrow y$.

S reducibilis, ha nem irreducibilis.

[Kicsit pongyolán azt is mondjuk, hogy a Markov lánc irreducibilis / reducibilis.]

Def: A C kommunikáló osztály zárt, ha nem vezet ki belőle (pozitív val-ségű) átmenet: $\forall x \in C$, $y \notin C$-re $P_{xy} = 0$.

C nyílt, ha nem zárt.

Pl.: $C_1 = \{1\}$ és $C_2 = \{2, 3, 4\}$ nyílt

$C_3 = \{5, 6\}$ és $C_4 = \{7, 8\}$ zárt.

Intuitív kép:

- zárt osztály tekinthető önálló Markov láncnak
- nyílt osztályból a rendszer előbb-utóbb kilép (a súly/homok előbb-utóbb elfolyik).

[Megj: Ha egy nyílt osztály végtelen, akkor azért ez nem ilyen egyszerű.]

Rekurrencia / tranziencia, lényegesség / lényegtelenség

A hosszú távú viselkedés szempontjából alapvető fogalmak:

*Def: $x \in S$-re legyen T_x az x állapot első érési ideje:

~~$T_x := \min\{n \mid X_n = x$~~

$$T_x := \begin{cases} \min\{n \geq 1 : X_n = x\}, & \text{ha van ilyen } n \\ \infty, & \text{ha nincs.} \end{cases}$$

[Konvenció: ha $X_0 = x$, akkor T_x az első $\boxed{\text{visszatérési}}$ idő: $n=0$ nem számít, így $T_x \geq 1$. Persze $T_x = 1$ lehet: az is visszatérésnek számít, ha egyből helyben ugrunk.]

[Megj: T_x eloszlásának kiszámolása általában nehéz. Ettől még a fogalom fontos/hasznos.]

<u>Def:</u> Az $x \in S$ állapot <u>rekurrens</u> vagy <u>visszatérő</u>, ha

$$\mathbb{P}(\text{visszatérés}) = \mathbb{P}(T_x < \infty \mid X_0 = x) = 1.$$

$x \in S$ <u>tranziens</u> vagy <u>átmeneti</u>, ha nem rekurrens.

<u>Def:</u> Egy rekurrens $x \in S$ állapot lehet

- <u>pozitív rekurrens</u>, ha

  $$\mathbb{E}(\text{visszatérési idő}) = \mathbb{E}(T_x \mid X_0 = x) < \infty$$

- <u>nullrekurrens</u>, ha rekurrens, de nem pozitív rekurrens.

[Az elnevezés értelme hamarosan ki fog derülni.]

<u>Def:</u> Egy $x \in S$ állapot <u>lényeges</u>, ha van olyan π stacionárius eloszlás, hogy $\pi_x > 0$.

$x \in S$ <u>lényegtelen</u>, ha nem lényeges.

<u>Pl:</u> az előző példában

- „1" tranziens, hiszen a visszatérés val.sége 0
- „2" is tranziens: a visszatérés nem kizárt, de pozitív val.séggel rögtön ugrunk 5-be és sose jövünk vissza
- „5" rekurrens: 2 lépésben garantáltan visszajövünk
- „7" is rekurrens: 8-ból visszatérni sokáig tarthat, de előbb-utóbb 1 val.séggel sikerül.

Sőt: pozitív rekurrens

- „1" lényegtelen : $\Pi_1(n+1)=0$, így ha $\pi(n)=\pi$ $\forall n$, akkor

$$\Pi_1=0$$

23/35

- „2" is lényegtelen: a $\{2,3,4\}$ osztályban a homok össz-mennyisége minden lépésben csökken (amikor 1-ben már nincs), hacsak nem nulla $\Rightarrow$ stac. eloszlás nem adhat nekik pozitív súlyt.
- „5", „6", „7" és „8" lényeges – ez tétel lesz.

<u>Tétel</u> (könnyű): A rekurrencia/tranziencia, pozitív rekurrencia/nullrekurrencia, lényegesség/lényegtelenség <u>osztálytulajdonság</u>, vagyis

- ha $x \in S$ rekurrens és $x \leftrightarrow y$, akkor y is rekurrens
- ha $x \in S$ poz. rekurrens és $x \leftrightarrow y$, akkor y is poz. rekurrens
- ha $x \in S$ lényeges és $x \leftrightarrow y$, akkor y is lényeges.

<u>Avagy:</u> egy kommunikáló osztály elemei együtt sírnak, együtt nevetnek rekurrencia, pozitív rekurrencia és lényegesség szempontjából.

<u>Köv:</u> Értelmes rekurrens/tranziens, pozitív rekurrens/nullrekurrens, lényeges/lényegtelen <u>osztályokról</u> beszélni: pl. egy osztály akkor lényeges, ha van lényeges eleme $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ha minden eleme lényeges.

Pl: $C_1=\{1\}$ ~~t~~ tranziens, lényegtelen

$C_2=\{2,3,4\}$ tranziens, lényegtelen

$C_3=\{5,6\}$ poz. rekurrens, lényeges

$C_4=\{7,8\}$ poz. rekurrens, lényeges.

Sőt: Ha S irreducibilis, akkor szokás rekurrens / tranziens, poz. rekurrens / nullrekurrens Markov láncról beszélni.

Tétel (nem trivi): Egy kommunikáló osztály

lényeges $\Longleftrightarrow$ pozitív rekurrens $\Longrightarrow$ rekurrens $\Longrightarrow$ zárt

lényegtelen $\Longleftrightarrow$ tranziens vagy null-rekurrens $\Longleftarrow$ tranziens $\Longleftarrow$ nyílt

[~~Vegyük~~: Megj: 1.) ez indokolja a „pozitív rekurrens" elnevezést.
2.) Nyílt osztály mindig tranziens és lényegtelen, de zártnak lenni önmagában semmire sem elég: zárt osztály is lehet tranziens – lásd a driftes bolyongást $\mathbb{N}$-en, jobbra drifttel [vagy $\mathbb{Z}$-n, bármerre drifttel].]

VÉGES esetben minden egyszerű:

<u>Tétel</u> Egy <u>véges</u> kommunikáló osztály

lényeges $\Longleftrightarrow$ pozitív rekurrens $\Longleftrightarrow$ zárt

lényegtelen $\Longleftrightarrow$ tranziens $\Longleftrightarrow$ nyílt

[és null-rekurrens soha nem lehet].

Periódikusság

Láttuk: a stabilitás szempontjából gondot okoz, ha egy állapotba visszatérni csak minden páros időpontban lehet. Ezért

Def: Egy $x \in S$ állapot periódusa a lehetséges visszatérési idők halmazának legnagyobb közös osztója:

$$d(x) := \text{lnko}\{n \geq 1 : P_{xx}(n) > 0\}$$

$P_{xx}(n)$: n lépéses átmenet-valószínűség

Avagy: $d(x)$ a legnagyobb olyan szám, amire igaz, hogy x-ből x-be visszatérni csak ennek többszörösében lehet.

Pl: az előző példában

- 5-ből 5-be a lehetséges visszatérési idők $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
  $\Rightarrow d(5) = \text{lnko}\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = 2$
- 2-ből 2-be a lehetséges visszatérési idők $\{2, 3, 4, 5, \ldots\}$
  $\Rightarrow d(5) = \text{lnko}\{2, 3, 4, 5, \ldots\} = 1$ — pedig 1 lépésben nem is lehet visszatérni
- 1-ből 1-be a lehetséges visszatérési idők halmaza üres
  $\Rightarrow d(1) = \text{lnko}(\emptyset) = \infty$, vagy inkább ne is beszéljünk róla.

Tétel (könnyű): A periódus osztály-tulajdonság, vagyis ha $x \leftrightarrow y$, akkor $d(x) = d(y)$.

Köv.: Értelmes egy kommunikáló osztály periódusáról beszélni: az az osztály összes elemének (közös) periódusa.

Def: Egy állapot – vagy egy osztály – aperiodikus, ha a periódusa 1; periodikus, ha a periódusa ≥ 2.

Pl: A fenti példában

$C_1 = \{1\}$-re $d = \infty$, periodikus

$C_2 = \{2,3,4\}$-re $d = 1$, aperiodikus

$C_3 = \{5,6\}$-ra $d = 2$, periodikus

$C_4 = \{7,8\}$-re $d = 1$, aperiodikus

[Trivi megjegyzés: ha egy osztályban van egyetlen egy hurokél, akkor az egész osztály aperiodikus.]

Stabilitás

Mivel a nyílt osztályok lényegtelenek, a stabilitás szempontjából lényegében elég a zárt osztályokat megérteni.

Ezért mostantól <u>irreducibilis</u> Markov láncokkal foglalkozunk (hogy az állítások egyszerűbben hangozzanak).

Tétel (Markov lánc stabilitása)

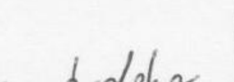
Egy irreducibilis Markov lánc stabil $\Updownarrow$ aperiodikus és pozitív rekurrens.

[Megj: a $\Downarrow$ irány az eddigiek alapján nyilvánvaló.
A lényeg a $\Uparrow$ irány: ez nem trivi, és nagyon érdekes.]

Spec. eset véges állapottérre:

Tétel (Markov láncok alaptétele)

Egy <u>véges állapotterű</u>, <u>irreducibilis</u>, <u>aperiodikus</u> Markov lánc stabil.

[Megj: Persze reducibilis Markov lánc is lehet stabil, pl. 
]

<u>P1:</u> Az utazgató üzletember a múlt órai példából — lásd 8. oldal:

Emberünk a szilvesztert Nekeresden töltötte. (4-es állapot)

Mennyi a valószínűsége <u>közelítőleg</u>, hogy a következő Karácsonyt (51 utazással később) Piripócson éri? (5-ös állapot)

<u>Megoldás:</u> a $\mathbb{P}(X_n = 5 | X_0 = 4)$ val.séget keressük, ahol $n = 51$.

~~Mivel $n=51$ hosszú idő, a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_n=5|X_0=4$~~

A Markov lánc <u>irreducibilis</u>, <u>véges állapotterű</u> és <u>aperiodikus</u> (pl. mert 1-ből 1-be 2 és 3 lépésben is vissza lehet térni).

Mivel $n = 51$ hosszú idő, a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_n = 5 | X_0 = 4) \approx \pi_5 \overset{\text{lásd}}{\underset{\text{12. oldal}}{=}} \frac{9}{31} \approx 0.29 = 29\%$.

[És persze nem használtuk ki, hogy Nekeresdről indult.]

Kiegészítés végtelen állapotterű Markov láncok stabilitásához

Végtelen állapottér esetén a stabilitás ellenőrzéséhez hasznos lehet az alábbi (nem trivi) tétel:

<u>Tétel</u> (Valószínűségek konvergenciája nem pozitív rekurrens Markov láncban)

Legyen X_n irreducibilis Markov lánc.

Ha X_n tranziens vagy null-rekurrens, akkor tetszőleges $\pi(0)$ kezdeti eloszlás esetén, tetszőleges $x \in S$ állapotra

$$\mathbb{P}(X_n = x) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

<u>Ugyanez fordítva:</u> Ha az X_n irreducibilis Markov lánchoz található egyetlen olyan $\pi(0)$ kezdeti eloszlás és $x \in S$ állapot, hogy $\mathbb{P}(X_n = x) \not\to 0$ amint $n \to \infty$,

akkor X_n pozitív rekurrens.

<u>Jelenség:</u> Ha nincs stac. eloszlás, akkor a kezdeti homok-kupacok egyre jobban szétaprózódnak a ∞ sok állapot között: hosszú távon mindegyiknek a mérete (külön-külön) nullához tart.

[Ettől még persze az össz-súly mindig 1 marad.]

Ergodicitás

Utazgató üzletemberünk szálledai kényelme Benchidán heti 8 petákba kerül. Ugyanez a költség Hencidán 7 peták / hét, Kukutyinban 6 peták / hét, Nekeresden 5 peták / hét, Piripácson 11 peták / hét.

Kérdés: Mennyi az átlagos heti szálloda-költsége hosszú távon?

Avagy: legyen $f: S \to \mathbb{R}$ a költség-függvény: peták / hét -ben mérve $f(1)=8$, $f(2)=7$, $f(3)=6$, $f(4)=5$, $f(5)=11$: azt mutatja meg, hogy az adott állapotban mennyit kell fizetni.

Tekintsük oszlopvektornak: $f = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Így az n-edik héten a költség $f(X_n)$ (persze véletlen).

N hét alatt az össz-költség

$$f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})$$ szintén véletlen.

az átlagos költség $$\frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{N}.$$

Intuició:

Hosszú idő ~~eltelével~~ után $\Pi_5 \approx 29\%$ valószínűséggel lesz Piripócson,

így hosszú idő a ~~eltelével~~ alatt az idő kb $\Pi_5 = 29\%$-át tölti

ott: az eltelt ~~idő~~ hetek ekkora hányadában fizet 11 petákot.

Ugyanígy az idő $\Pi_1 = \frac{12}{31}$ hányadában fizet $f(1) = 8$ petákot,

Π_2 hányadában $f(2)$ petákot, stb...

Összesen N hét alatt kb

$$N \cdot \Pi_1 \cdot f(1) + N \cdot \Pi_2 \, f(2) + \dots + N \Pi_5 f(5) \quad \text{petákot fizet}$$

$\Rightarrow$ az átlagos költsége $\Pi_1 f(1) + \Pi_2 f(2) + \dots + \Pi_5 f(5)$

Észrevétel: Az intuició jó de formálisan a valószínűség és a gyakoriság két különböző dolog.

HA $X_0, X_1, X_2 \dots$ független, azonos eloszlású ~~lenne~~ LENNE, akkor a nagy számok törvénye biztosítaná, hogy

$$\text{gyakoriság} \xrightarrow{\text{idő} \to \infty} \text{valószínűség}.$$

ÁMDE $X_0, X_1, X_2 \dots$ se nem független, se nem azonos eloszlású.

Az intuitív számolás eredménye mégis helyes: ezt mondja ki az ERGODTÉTEL.

Tétel (ergodtétel véges állapotterű Markov láncokra)

Legyen X_n irreducibilis időben homogén Markov lánc a véges S állapottéren, és legyen $f: S \to \mathbb{R}$ függvény.

Ekkor 1 valószínűséggel

$$\boxed{\underbrace{\frac{f(X_0)+f(X_1)+\dots+f(X_{n-1})}{n}}_{\text{időátlag}} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\sum_{x\in S} \pi_x f(x)}_{\text{sokaság-átlag}}}$$

ahol π az egyetlen stac. eloszlás.

Megj: A $\sum_{x\in S} \pi_x f(x)$ sokaság-átlag tényleg az f lehetséges értékeinek átlaga, és pedig súlyozva a stac. eloszlással.

Más nevén: $\boxed{\text{stac. eloszlás szerinti várható érték}}$

Jelölés: $\mathbb{E}_\pi f := \sum_{x\in S} \pi_x f(x) \underset{\text{mátrixos jelölés}}{=\!=} \pi \cdot f$

sorvektor · oszlopvektor

Köv: emberünk heti átlagos szállodaköltsége hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\mathbb{E}_\pi f = \pi f = \left(\frac{12}{31}\ \frac{6}{31}\ \frac{3}{31}\ \frac{1}{31}\ \frac{9}{31}\right)\cdot\begin{pmatrix}8\\7\\6\\5\\11\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{12\cdot 8+6\cdot 7+3\cdot 6+1\cdot 5+9\cdot 11}{31} = \frac{260}{31} \approx \underline{8.39}$$

(peták)

<u>Spec. eset:</u> Legyen $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = x_0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

az x_0 állapot <u>indikátora</u>, ahol x_0 egy kiválasztott állapot.

Ekkor $f(X_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } X_n = x_0 \\ 0, & \text{ha nem,} \end{cases}$ vagyis

$f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})$ éppen a $0, \dots n-1$ között x_0-ban eltöltött (diszkrét) idő,

a jobboldal pedig $\mathbb{E}_\pi f = \sum_{x \in S} \pi_x f(x) = \pi_{x_0}$

$\Rightarrow$ Az ergodtétel állítása:

$$\boxed{\frac{n\text{-ig } x_0\text{-ban eltöltött idő}}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi_{x_0} \quad 1 \text{ val.séggel.}}$$

[Persze továbbra is feltétel, hogy X_n irreducibilis & véges legyen.]

[<u>Megj:</u> Az ergodtétel feltételei között <u>nem szerepel</u> (és nem kell), hogy X_n aperiodikus legyen.]

<u>Általánosítás végtelen állapottér esetére</u>

Ha S végtelen, csak egy kicsit kell jobban óvatosnak lenni, hogy a sokaságátlag biztosan létezzen:

Tétel (Ergod-tétel Markov láncokra)

Legyen X_n irreducibilis, időben homogén Markov lánc az S diszkrét állapottéren, és legyen $f: S \to \mathbb{R}$ függvény.

Tegyük fel, hogy

- X_n pozitív rekurrens
- $\sum_{x \in S} \pi_x |f(x)| < \infty$, ahol π az egyetlen stac. eloszlás.

Ekkor 1 valószínűséggel

$$\underbrace{\frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{n}}_{\text{időátlag}} \xrightarrow{n \to \infty} \underbrace{\mathbb{E}_\pi f := \sum_{x \in S} \pi_x f(x)}_{\text{sokaságátlag}} .$$