A sorhossz határeloszlása állandó kiszolgálás esetén

1/3

Tekintsük az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ diszkrét idejű sorhossz-evolúciós egyenletet, ahol

$V_1, V_2, V_3 \ldots$ azonos eloszlású $\sim V \in \mathbb{N}$
$Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ — // — $\sim Y \in \mathbb{N}$
teljesen függetlenek egymástól és X_0-tól is.

$\boxed{\text{A } V \equiv 1 \text{ eset jól fog jönni a folytonos idejű modelleknél.}}$

<u>Tétel</u> Tfh $\boxed{V \equiv 1}$, vagyis minden lépésben pontosan 1 igény kiszolgálására van kapacitás, és $\mathbb{E}Y < \mathbb{E}V = 1$, vagyis az X_n Markov lánc stabil. Legyen Y generátorfüggvénye g_Y. Ekkor az X_n Markov lánc (egyetlen) stacionárius eloszlásának generátorfüggvénye

$$\boxed{g_{X^{stac}}(z) = p_0 (1-z) \frac{g_Y(z)}{g_Y(z) - z}},$$

ahol $p_0 := \mathbb{P}(X^{stac} = 0) = 1 - \mathbb{E}Y$ az üresjárat val.sége.

<u>Biz.:</u> $X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + Y_{n+1}$, és stacionárius esetben $X_{n+1} \sim X_n \sim X^{stac}$. Legyen $\tilde{X}_n := (X_n - 1)_+$. Ez persze független Y_{n+1}-től, ezért

$$g_{X^{stac}}(z) = g_{\tilde{X}_n + Y_{n+1}}(z) \overset{\text{függetlenség}}{=} g_{\tilde{X}_n}(z) \cdot g_Y(z). \quad (*)$$

<u>Lemma:</u> Legyen az $X \in \mathbb{N}$ val. változó generátorfüggvénye g_X. Legyen $p_0 = \mathbb{P}(X=0)$, és legyen $\tilde{X} = (X-1)_+$.

Ekkor $\tilde{X}$ generátorfüggvénye $g_{\tilde{X}}(z) = p_0 + \dfrac{g_X(z) - p_0}{z}$.

<u>Lemma bz.:</u> Legyen $p_k = \mathbb{P}(X=k)$ $\forall k$. Ekkor

k	0	1	2	3	4	---
$\mathbb{P}(X=k)$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	---
$\mathbb{P}((X-1)_+=k)$	p_0+p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	---

amiből $g_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots$

$$\boxed{g_{\tilde{X}}(z) = p_0 + \underbrace{p_1 + p_2 z + p_3 z^2 + p_4 z^3 + \dots}_{\text{ha ezt } z\text{-vel megszoroznám, pont } g_X(z) - p_0 \text{ jönne ki}} = p_0 + \frac{g_X(z) - p_0}{z}}$$

□ lemma

Alkalmaztuk a lemmát $X := X_n$ választással, így

$$g_{\tilde{X}_n}(z) = p_0 + \frac{g_{X^{stac}}(z) - p_0}{z}.$$

Ezt visszahelyettesítve ⊛-ba azt kapjuk, hogy

$$g_{X^{stac}}(z) = \left(p_0 + \frac{g_{X^{stac}}(z) - p_0}{z}\right) g_Y(z).$$

Ez elsőfokú egyenlet $g_{X^{stac}}(z)$-re. Átrendezve

$$g_{X^{stac}}(z)\left(1-\frac{g_Y(z)}{z}\right) = p_0\left(1-\frac{1}{z}\right) g_Y(z) \qquad \Big/ \cdot \frac{z}{z-g_Y(z)}$$

$$g_{X^{stac}}(z) = p_0 (z-1)\,\frac{g_Y(z)}{z-g_Y(z)}$$

~~tétel~~.

Azt pedig korábbról tudjuk, hogy az üresjárat valószínűsége $p_0 = \mathbb{P}(X^{stac}=0) = 1-\frac{\mathbb{E}Y}{\mathbb{E}V} \overset{V=1}{=} 1-\mathbb{E}Y$. □ tétel

<u>Megj.:</u> A számolás könnyen általánosítható arra az esetre, amikor $V\sim B(p)$. Ekkor persze a stabilitás feltétele $\mathbb{E}Y<p$, az üresjárat $p_0=\mathbb{P}(X^{stac}=0)=1-\frac{\mathbb{E}Y}{p}$, és az jön ki, hogy

$$g_{X^{stac}}(z) = \underbrace{p_0\, p}_{p-\mathbb{E}Y}\,(1-z)\,\frac{g_Y(z)}{[p+(1-p)z]\,g_Y(z)-z}.$$