A sorhossz határeloszlása állandó érkezés esetén

Tekintsük az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ ~~sorhossz~~ diszkrét idejű sorhossz-evolúciós egyenletet, ahol

$V_1, V_2, V_3 \dots$ azonos eloszlású $\sim V \in \mathbb{N}$
$Y_1, Y_2, Y_3 \dots$ — // — $\sim Y \in \mathbb{N}$
teljesen függetlenek egymástól és X_0-tól.

$\boxed{\text{Az } Y \equiv 1 \text{ eset jól fog jönni a folytonos idejű modelleknél.}}$

Tétel Tfh $\boxed{Y \equiv 1}$, vagyis minden lépésben pontosan 1 igény érkezik, és $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y = 1$, vagyis az X_n Markov lánc stabil. Legyen V generátorfüggvénye g_V. Ekkor az X_n Markov lánc (egyetlen) stacionárius eloszlása

$$\boxed{X^{stac} \sim Geom(1-\theta)}$$

ahol θ a $\theta = g_V(\theta)$ fixpont-egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása, vagyis a g_V ~~egyetlen~~ függvény egyetlen $[0,1)$-beli fixpontja.

Biz.: $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + 1$, amiből persze $X^{stac} \geq 1$.
Ha megálmodjuk, hogy X^{stac} eloszlása geometriai, akkor a bizonyítás és θ azonosítása már könnyű: csak ellenőrizni kell a stacionaritást.

Ezért <u>tfh</u> $X_n \sim Geom(1-\theta)$, vagyis

$$\mathbb{P}(X_n = i) = (1-\theta)\,\theta^{i-1} \qquad i = 1, 2, \dots$$

Nézzük, hogy tényleg igaz-e, hogy $X_{n+1} \sim Geom(1-\theta)$ szintén. Vagyis számoljuk ki $\mathbb{P}(X_{n+1} = j)$-t minden $j = 1, 2, 3 \dots$-re.

1.) Ha $j \geq 2$, akkor $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + 1 = j$ csak úgy lehetséges, ha $(X_n - V_{n+1})_+ = j - 1 \gneq 0$, vagyis a $(\quad)_+$ pozitív rész <u>elhagyható</u>. [az $n+1$-edik lépésben nem volt kihasználatlan kapacitás, a sorhossz „nap közben" sem érte el a nullát. Ez azért jó, mert így tudjuk, hogy V_{n+1} megegyezik a <u>ténylegesen kiszolgált</u> igények számával.]

Vagyis $\boxed{j \geq 2\text{-re}}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \mathbb{P}\big((X_n - V_{n+1})_+ = j-1\big) = \mathbb{P}(X_n - V_{n+1} = j-1) =$$

$$= \mathbb{P}(V_{n+1} = X_n + 1 - j) \xrightarrow[\text{valsbg tétel}]{\text{teljes}} \cancel{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(V_{n+1} = i + 1 - j \mid X_n = i) \xrightarrow{\text{függetlenség}}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(V_{n+1} = i + 1 - j).$$

Persze $V_{n+1} \geq 0$, így 3/8

$$\mathbb{P}(V_{n+1} = i+1-j) = \mathbb{P}(V = i+1-j) = 0, \text{ ha } i+1-j < 0,$$

ezért elég azt nézni, amikor $i \geq j-1$

[Hát persze, X_n egy lépésben legfeljebb 1-et ugorhat felfelé]

$\Longrightarrow$ továbbra is $j \geq 2$-re

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{\underline{\underline{i=j-1}}}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i)\,\mathbb{P}(V = \overbrace{i+1-j}^{k := i+1-j}) \underset{i=j-1+k}{=\!=\!=}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V=k)\,\mathbb{P}(X_n = j-1+k) \underset{\text{az } X_n\text{-re kell feltevést}}{\overset{\text{most használjuk ki}}{=\!=\!=\!=}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V=k)(1-\theta)\,\theta^{(j-1+k)-1} =$$

$$= (1-\theta)\,\theta^{j-2} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V=k)\,\theta^k \overset{\text{Hurrá}}{=\!=\!=} (1-\theta)\,\theta^{j-2}\, g_V(\theta)$$

Örömmel látjuk, hogy $\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = (1-\theta)\,\theta^{j-1}$ (amit remélünk)

pontosan akkor teljesül, ha $\theta = g_V(\theta)$

– legalábbis $j \geq 2$-re.

2.) $j=1$-re már nem kell végigcsinálni a számolást:

ha $\theta = g_V(\theta)$, akkor

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1) = 1 - \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1}=j) = 1 - \sum_{j=2}^{\infty} (1-\theta)\theta^{j-1} =$$

$$= 1 - \sum_{j=2}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Geom}(\theta)=j) = \mathbb{P}(\mathrm{Geom}(\theta)=1) \checkmark$$

3.) Meg kell viszont nézni, hogy tényleg van olyan $\theta \in [0,1)$, amire $\theta = g_V(\theta)$?

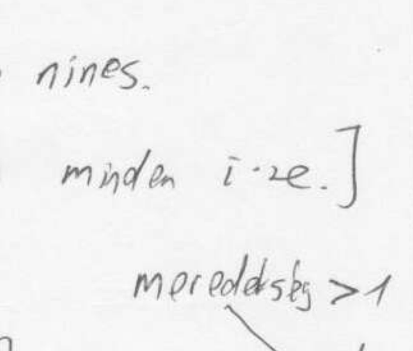
Persze, $g(1)=1$ minden generátorfüggvényre, vagyis $\theta=1$ mindig fixpont, de nekünk nem jó:

$1-\theta=0$ paraméterű Geom eloszlás nincs.

[A képlet azt adná, hogy $\mathbb{P}(X_n=i)=0$ minden i-re.]

SZERENCSÉRE tudjuk, hogy g_V

- monoton növekvő $[0,1]$-en
- konvex $[0,1]$-en
- $g_V(0)=\mathbb{P}(V=0) \in [0,1)$
- és $\boxed{\text{FELTETTÜK}}$, hogy $EV = g_V'(1) > 1$: ez kell a stabilitáshoz



$\boxed{\text{Kell lenni pontosan 1 másik fixpontnak!}}$

□ Hurrá.

Megj: Előfordulhat, hogy $\theta = 0$, vagyis $X^{stac} \sim Geom(1)$, vagyis $X^{stac} \equiv 1$.

A tételből (és az ábrából is) látszik, hogy ez pont akkor van, ha $g_V(0) = 0$, vagyis

$$\mathbb{P}(V=0) = 0.$$

Hát persze: ez pont azt jelenti, hogy $V \geq 1$, vagyis a bejövő 1 igényt mindig azonnal ki-szolgáljuk. A sorhossz minden nap végén pontosan 1 lesz: a rendszer stabil (bár nem irreducibilis).

Megj: A számolás általánosítható arra az esetre, amikor $Y \sim B(q)$. Ekkor a stabilitás feltétele $\mathbb{E}V > q$, a stac. eloszlás pedig 0-ban torzított geometriai. Konkrétan

$$\mathbb{P}(X^{stac} = i) = \begin{cases} 1-\alpha, & \text{ha } i = 0 \\ \alpha(1-\theta)\theta^{i-1}, & \text{ha } i \geq 1 \end{cases}$$

ahol θ a $g_V(\theta) = \dfrac{\theta}{q + (1-q)\theta}$ egyenlet egyetlen $[0,1)$-beli megoldása és $1-\alpha = (1-\theta)(1-q)$.

Kiegészítés: $\exists$ ó, de honnan lehet megsejteni / látni, hogy X^{stac} geometriai?

Ehhez tfh X_n stacionárius, eloszlása

π_1, π_2, π_3 - - - - (vagyis $\pi_k = \mathbb{P}(X_n = k)$).

Vezessük be az $r_k := \mathbb{P}(X_n > k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \pi_\ell$ jelölést.

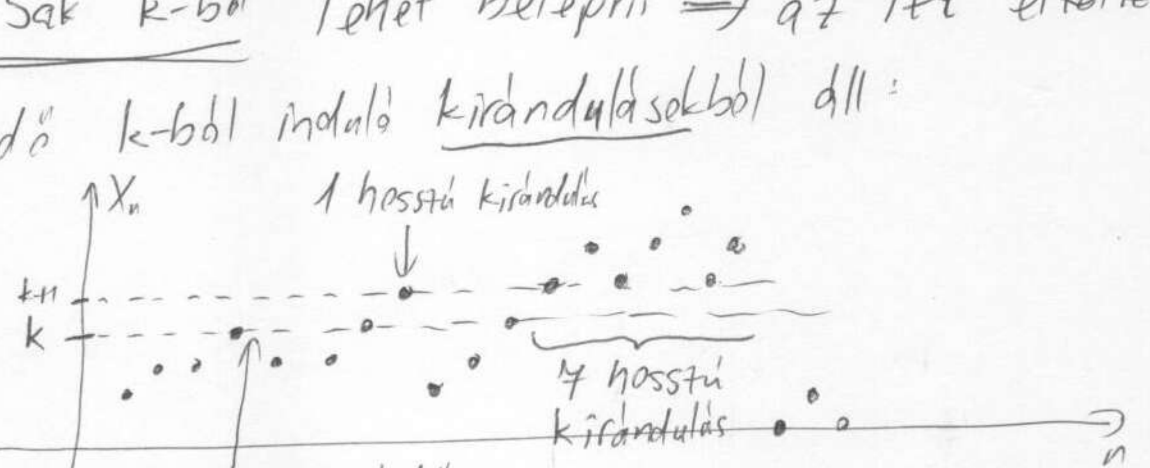
[szokásos elnevezés: r_k az eloszlás „farka" = „tail"]

Ha N nagyon nagy, akkor az ergodtétel szerint

~~kb $N \cdot \pi_k$ időt~~ N idő (lépés) alatt

- kb $N \pi_k$ időt töltünk k-ban
- kb $N r_k$ időt töltünk a $\{k+1, k+2, k+3, \dots\}$ halmazban.

Kulcs-észrevétel: a $\{k+1, k+2, \dots\}$ halmazba csak k-ból lehet belépni $\Rightarrow$ az itt eltöltött idő k-ból induló kirándulásokból áll:



minden kirándulás előtt járnunk kell k-ban.

Legyen ezen kirándulások hossza $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \dots$

Ezek nyilván
- véletlenek
- függetlenek,
- azonos eloszlásúak

és ami a lényeg: ~~[illegible]~~ AZ ELOSZLÁSUK

UGYANAZ MINDEN k-ra:

mindegy, hogy $k=10$-ből indulok kirándulásra a $\{11, 12, 13 \dots\}$ halmazba,

vagy $k=100$-ból indulok kirándulásra a $\{101, 102, 103, \dots\}$ halmazba.

Legyen $E\tau_1 = E\tau_2 = \dots = E\tau$ a közös várható érték.

Így N idő alatt a $\{k+1, k+2, \dots\}$ halmazban eltöltött idő úgy is kijön, mint kb $N\pi_k$ db kirándulás összege: $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{N\pi_k} \approx N\pi_k E\tau$.

nagy számok törvénye

Vagyis $N r_k = N\pi_k E\tau \Rightarrow r_k = \pi_k E\tau$,

vagyis $\boxed{\dfrac{r_k}{\pi_k} \text{ független } k\text{-tól.}}$ Ez pedig a geometriai eloszlás sajátossága.

(Ha nem kiszed, lásd a lenti megjegyzést)

Megj 1 Az érvelés precízzé tehető az ergodtétel segítségével, de ez szükségtelen, mert a stacionaritást leellenőriztük.

Megj 2: Mivel $\pi_k = r_{k-1} - r_k$, ezért

$$\frac{\pi_k}{r_k} = \frac{r_{k-1} - r_k}{r_k} = \frac{r_{k-1}}{r_k} - 1 \Rightarrow \frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{\pi_k}{r_k} - 1$$

is független k-tól $\Rightarrow r_k = r_0 \theta^k$ valamilyen θ-ra

$$\Rightarrow \pi_k = r_{k-1} - r_k = r_0 \theta^{k-1} - r_0 \theta^k = \underbrace{r_0(1-\theta)}_{\text{konstans}} \theta^{k-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \sim \mathrm{Geom}(\theta)}$$