A bináris-bináris modell: sorhossz, várakozási idő, késleltetés, foglaltság

Egy kiszolgálási sorba az n-edik időpontban $Y_n \sim B(q)$ számú igény érkezik. Szintén az n-edik időpontban $V_n \sim B(p)$ számú igényt szolgálunk ki, ha van legalább 1 igény a sorban (nem számítva azt, aki éppen ~~most érkez~~ n-kor érkezik), ahol $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ diszkrét idő, X_n a sorhossz és $X_0, V_1, V_2, V_3 \ldots$, ~~függetlenek~~ $Y_1, Y_2, Y_3 \ldots$ teljesen függetlenek.

Ebben a nagyon speciális esetben a sorhossznak, várakozási időnek, késleltetésnek és a foglaltsági periódus hosszának is ki tudjuk számolni a stacionárius eloszlását (és nem csak ennek várható értékét).

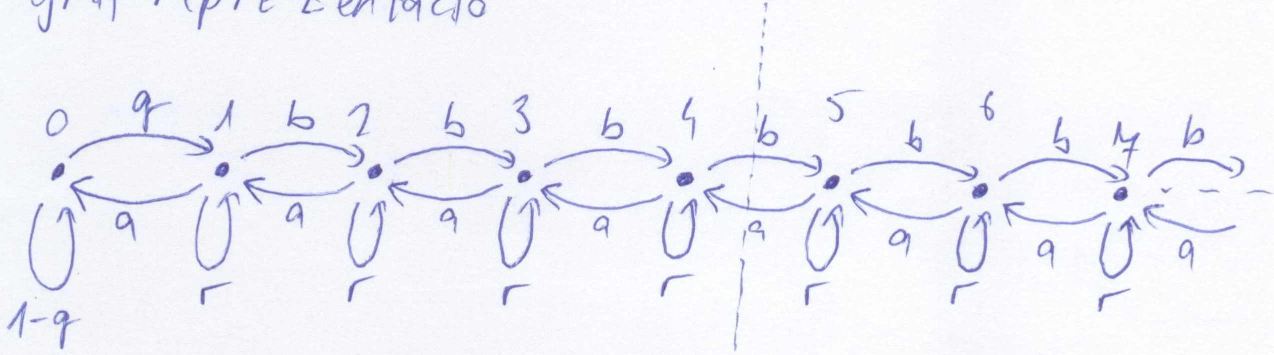
(1) Sorhossz: Ezerszer láttuk, hogy $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$, amiből látható, hogy

a sorhossz $\begin{cases} \text{1-gyel csökken, ha } V_{n+1}=1 \text{ és } Y_{n+1}=0, \text{ vagyis} \\ \qquad a := p(1-q) \text{ val. séggel} \\ \text{1-gyel nő, ha } V_{n+1}=0 \text{ és } Y_{n+1}=1, \text{ vagyis} \\ \qquad b := (1-p)\, q \text{ val. séggel} \\ \text{nem változik a maradék } r := 1-a-b \\ \qquad \text{val. séggel,} \end{cases}$

kivéve, ha a szériahossz eleve 0 volt, mert akkor V_{n+1} nem számít (nincs mit kiszakítani), csak Y_{n+1}:

0-ról a szériahossz $\left\{\begin{array}{l} \text{1-re nő, ha } Y_{n+1}=1\text{, vagyis } q \text{ val.séggel} \\ \text{0 marad a maradék } 1-q \text{ val. séggel.} \end{array}\right.$

A gráf-reprezentáció



Ez úgynevezett születési–halálozási folyamat (ami csak annyit jelent, hogy csak helyben vagy szomszédos állapotba lehet ugrani: $|X_{n+1}-X_n| \leq 1$).

Ilyen esetben a stac. eloszlás számolása könnyű:

pl. a 4-ből 5-be ugrás „gyakorisága" $\Pi_4 P_{45} = \Pi_4 b$

az 5-ből 4-be ~ $\Pi_5 P_{54} = \Pi_5 a$

meg kell egyezzen, mert más úton nem lehet átjutni $\{0,1,2,3,4\}$-ből $\{5,6,7,8,\ldots\}$-ba és viszont.

Vagyis $\Pi_4 b = \Pi_5 a$.

Hasonlóan $\Pi_k b = \Pi_{k+1} a \quad k = 1,2,3 \ldots$

és $\Pi_0 q = \Pi_1 a$

Innen látható, hogy

$$\Pi_1 = \Pi_0 \frac{q}{a}$$

$$\Pi_2 = \Pi_1 \frac{b}{a} = \Pi_0 \frac{q}{a} \frac{b}{a}$$

$$\Pi_3 = \Pi_2 \frac{b}{a} = \Pi_0 \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\Pi_k = \Pi_{k-1} \frac{b}{a} = \ldots = \Pi_0 \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

A sorösszeg

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k = \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_0 \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} \underset{l=k-1}{=} \Pi_0 \left[1 + \frac{q}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^l\right]$$

~~A~~ Ennek 1-nek kell lenni, ami akkor megy (Π_0 alkalmas megválasztásával), ha $1 + \frac{q}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^l < \infty$, amiből látszik, amit eddig is tudtunk, hogy a stabilitás feltétele $\frac{b}{a} < 1$: ekkor lesz a mértani sor konvergens.

[mivel $\begin{cases} a = p(1-q) \\ b = q(1-p) \end{cases}$ ezért ~~$b<a$~~ $b < a \Longleftrightarrow \boxed{p > q}$]

Ilyenkor $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^l = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{a}{a-b}$

$$\frac{q}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^l = \frac{q}{a} \frac{a}{a-b} = \frac{q}{a-b} = \frac{q}{p-q}$$

érdekes módon $a - b = p - pq - (q - qp) = p - q$

$$1+\frac{q}{a}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{\ell}=1+\frac{q}{p-q}=\frac{p-q+q}{p-q}=\frac{p}{p-q}$$

vagyis a normáláshoz

$$1=\Pi_0\,\frac{p}{p-q}\Rightarrow\boxed{\Pi_0=\frac{p-q}{p}=1-\frac{q}{p}}$$

és $k\geq 1$-re

$$\Pi_k=\Pi_0\,\frac{q}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}=\Pi_0\,\frac{q}{\cancel{a}}\,\frac{\cancel{a}}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{k}\ \underline{\underline{b=q(1-p)}}$$

$$\boxed{=\Pi_0\,\frac{1}{1-p}\left(\frac{b}{a}\right)^{k}}$$

<u>Megjegyzés</u>: Legyen $\gamma=\frac{b}{a}$ és $\alpha=1-\gamma$.

Ekkor $k=1,2,3\ldots$-re

$$\Pi_k=\mathrm{const}\cdot(1-\alpha)^{k-1}=\mathrm{const}'\cdot\alpha(1-\alpha)^{k-1}$$

ami egy $\mathrm{Geom}(\alpha)$ eloszlás szorozva konstanssal.

Ebből tudom, hogy $\mathrm{const}'=1-\Pi_0$, és

X^{stac}-ot úgy lehetne generálni, hogy

- feldobunk egy hamis érmét, aminek „fej" valsége $1-\frac{q}{p}$
- Ha fej, akkor legyen $X^{stac}=0$
- Ha írás, akkor legyen $X^{stac}=Z$ ahol $Z\sim\mathrm{Geom}(\alpha)$ független az érmedobásunktól.

② Sorhossz az igények szemszögéből

$\boxed{\text{Vigyázat!!}}$ NEHÉZ GONDOLAT következik.

Motiváció: A ~~késleltetés~~ várakozási idő határeloszlását keressük,

vagyis a $W_{n+1} = (W_n - T_{n+1} + S_n)_+$, $\underbrace{T_n \sim Geom(q),\ S_n \sim Geom(p)}_{\text{és mind függetlenek}}$

által megadott Markov lánc határeloszlását

(a stabil esetben, vagyis amikor $p > q$).

Gond: az átmenetmátrix csúnya, a $\pi P = \pi$ egyenletet megoldani nehéznek tűnik.

Megjegyzés: Ha W_n határeloszlása megvan, akkor lényegében megvan a késleltetés határeloszlása is: Ha D_n az n-edik igény késleltetése, akkor $D_n = W_n + S_n$, ahol $S_n \sim Geom(p)$ független W_n-től $\Rightarrow D_n$ eloszlása számolható.

Ötlet: Ha az n-edik igény érkezésekor N igény áll előtte a sorban (vagyis ő a sorban az N+1-edik), akkor N darab Geom(p) eloszlású kiszolgálási időt kell kivárnia, mielőtt sorra kerülne, és ezek függetlenek

$\Rightarrow W_n = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\hat{S}_i}_{\text{a sorban éppen i-edik helyen álló igény kiszolgálási ideje}}$. Mivel N véletlen, ez egy véletlen tagszámú összeg (függetlenség stimmel).

[Megj.: Az N darab kiszolgálásból a legelső lehet, hogy már elkezdődött, de a geometriai eloszlásnak ez mindegy (örökifjú).]

$\boxed{\text{Naiv}}$ terv: De hát N éppen a sor hossza az igény érkezésekor — ennek határeloszlását épp az előbb számoltuk ki — lásd 4. oldal. Ezért a stacionárius esetben

$$W_n = \sum_{i=1}^{X_n} \hat{S}_i \quad \text{véletlen tagszámú összeg.}$$

X_n generátorfv-e a 4. oldal alapján

$$g_{X_n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi_k z^k = \Pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\Pi_0)\,\alpha\,(1-\alpha)^{k-1} z^k =$$

$$= \Pi_0 + (1-\Pi_0)\frac{\alpha z}{1-(1-\alpha)z} \longleftarrow$$

α-ban torzított geometriai

$\hat{S}_i \sim \text{geom}(p) \Rightarrow$ generátor függvénye

$$g_{\hat{S}_i}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

$$\xrightarrow[\text{tagszámú összegről tétel}]{\text{véletlen}} \quad g_{W_n}(z) = g_{X_n}\left(g_{\hat{S}_i}(z)\right) = \Pi_0 + (1-\Pi_0)\frac{\alpha\frac{pz}{1-(1-p)z}}{1-(1-\alpha)\frac{pz}{1-(1-p)z}} =$$

$$= \ldots = \Pi_0 + (1-\Pi_0)\frac{[\alpha p]z}{1-(1-[\alpha p])z},$$

~~amiből látszik, hogy W_n is α-ban torzított geometriai eloszlású:~~

amiből látszik, hogy

$\mathbb{W}_n$ is 0-ban torzított geometriai eloszlású:

- π_0 valószínűséggel 0
- a maradék $(1-\pi_0)$ valószínűséggel $\sim \mathrm{Geom}(\alpha p)$.

$\boxed{\text{NEHÉZ | gondolat / észrevétel:}}$

Ez a számolás <u>TÚL NAIV</u>, és $\boxed{\text{nem jó.}}$

<u>HIBA:</u> A 4. oldalon kiszámolt (π_k) sorozat a sorhossz eloszlását mutatja egy tipikus $\boxed{\text{időpillanatban}}$, de nekünk <u>nem az</u> kell, hanem a sorhossz eloszlása egy tipikus $\boxed{\text{igény érkezésekor}}$, és az az időpillanat, amikor egy igény érkezik, már <u>nem tipikus</u>.

Pl. tudjuk, hogy <u>utána</u> a sorhossz ≥ 1, és nyilvánvalóan <u>hosszabb a tipikusnál</u>, cserébe <u>előtte</u> közvetlenül jellemzően <u>rövidebb a tipikusnál</u>.

<u>Köv:</u> Az, hogy a sorhosszból <u>nem fix időben</u> veszünk mintát, hanem mindig egy igény érkezésekor, <u>torzítja az eloszlást</u>.

<u>A jelenség neve:</u> Biased sampling = torzított mintavétel.

<u>Megj:</u> Erről a jelenségről szól a 3.1-es HF.

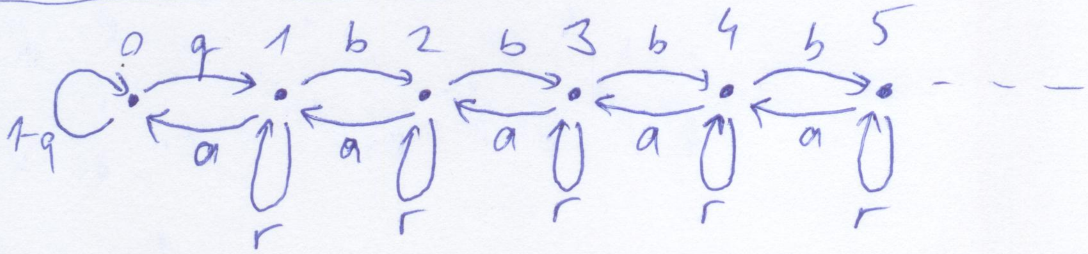
[motiváció vége]

<u>Kiút:</u> Legyen $\tilde{X}_n$ a sor hossza az n-edik igény érkezése után közvetlenül (vagyis az éppen érkezett igényt is beleszámítva). [Így persze $\tilde{X}_n \geq 1$]

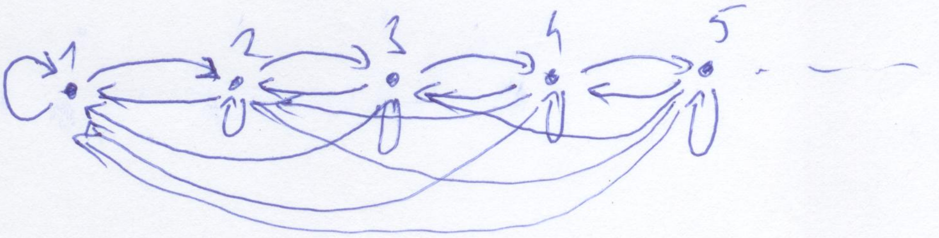
<u>Vigyázat:</u> n itt megint <u>nem idő</u>, hanem az igény sorszáma.

Ez az $\tilde{X}_n$ is nyilván Markov lánc, de bonyolultabb, mint az X_n

<u>X_n gráf-reprezentációja:</u>



$\tilde{X}_n$ gráf-reprezentációja:



(az átmenet-val. ségeket macerás lenne kiszámolni.)

Hát persze: a következő igény érkezéséig a sorhossz legfeljebb 1-gyel nőhet, de akármennyivel csökkenhet.

<u>Feladat:</u> keressük $\tilde{X}_n$ határeloszlását: ez mutatja, hogy milyennek látja a sorhosszat hosszú távon egy tipikus sorbanálló.

<u>Tétel</u> A stabil esetben (amikor $p>q$)

$\tilde{X}_n$ határeloszlása $\tilde{X}^{stac.} \sim Geom(\alpha)$,

tiszta (torzítatlan) geometriai eloszlás,

ahol $\alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ továbbra is.

<u>Biz:</u> (tanulságos!)

A (hullám nélküli) X_n Markov láncot fogjuk jól megnézni, és ennek (π_k) stac. eloszlásának „torzítottja"-ként kapjuk meg $\tilde{X}_n$ stac. eloszlását.

<u>Apró gond:</u> Pusztán X_n követésével nem tudjuk, hogy hány igény járt a rendszerben: ha a sorhossz legalább 1, akkor

- 1-gyel nő $b = \underset{\text{jön 1 igény}}{q}\ \underset{\text{nem történik kiszolgálás}}{(1-p)}$ val.séggel ✓

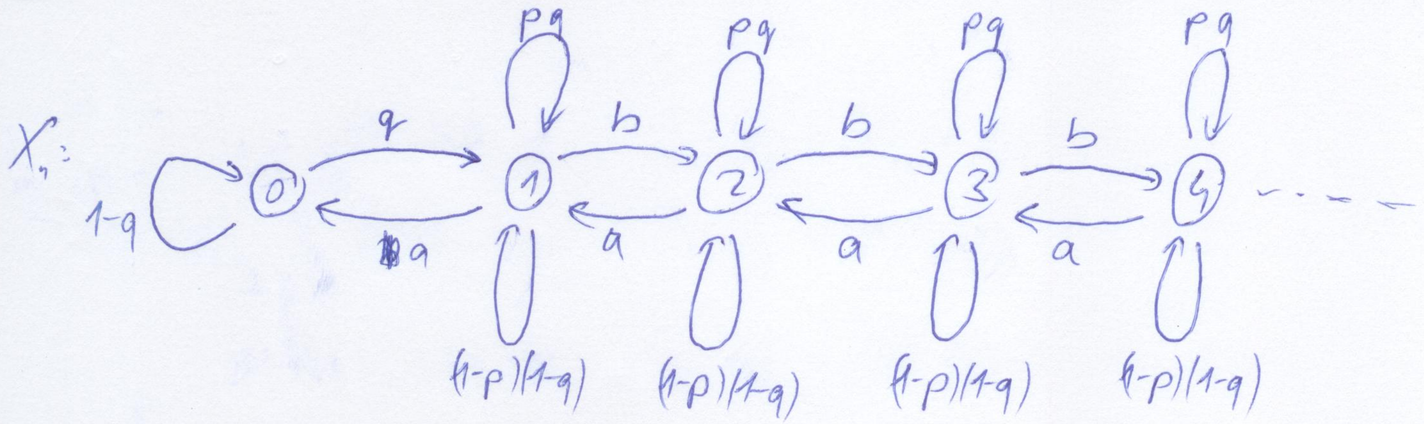
- 1-gyel csökken $a = \underset{\text{történik 1 kiszolgálás}}{p}\ \underset{\text{nem jön igény}}{(1-q)}$ val.séggel ✓

- nem változik $r = \underset{\text{nem jön igény}}{(1-q)}\ \underset{\text{nincs kiszolgálás}}{(1-p)} + \underset{\text{van kiszolgálás}}{p}\ \underset{\text{jön 1 igény}}{q}$ val.séggel

$\Rightarrow$ Ha a sorhossz nem változik, nem tudjuk, hogy jött-e új igény.

VAGY ?!?

Megoldás: Rajzoljunk jobb gráf-reprezentációt:



Pl. a 3 állapothoz két hurokél is van:

- a felső azt jelenti, hogy jött igény és volt kiszolgálás (val. sége pq)
- az alsó azt, hogy nem jött igény és nem volt kiszolgálás.

Nézzük, hosszú távon hányszor járunk át az egyes éleken!

Legyen M nagyon nagy. Így M idő alatt körülbelül

- $M\pi_0$-szer leszünk a 0 állapotban
- $\boxed{M\pi_0 q}$-szor haladunk át a $0 \xrightarrow{q} 1$ élen
- $M\pi_1$-szer járunk az 1 állapotban
- $\boxed{M\pi_1 pq}$-szer haladunk át az $1 \overset{pq}{\circlearrowright}$ élen

tehát összesen

$\boxed{(M\pi_0 q + M\pi_1 pq)\text{-szer érkezik olyan igény, akinek érkezése után a sorhossz 1.}}$

Hasonlóan, ~~M idő alatt kb~~ $k \geq 2$ állapotra M idő alatt kb

- $M\Pi_{k-1}$-szer leszünk a $(k-1)$ állapotban
- $\boxed{M\Pi_{k-1}b}$-szer haladunk át a $(k-1) \xrightarrow{b} (k)$ élen
- $M\Pi_k$-szor leszünk a (k) állapotban
- $\boxed{M\Pi_k pq}$-szor haladunk át a $\overset{pq}{\circlearrowleft}(k)$ élen

tehát összesen

$\boxed{(M\Pi_{k-1}b + M\Pi_k pq)\text{-szor érkezik olyan igény, akinek az érkezése után a sorhossz } k.}$

Az összes érkező igény száma ebből

$$M\Big[\underbrace{(\Pi_0 q + \Pi_1 pq) + (\Pi_1 b}_{\Pi_1(pq+b)=\Pi_1 q} + \underbrace{\Pi_2 pq) + (\Pi_2 b}_{\Pi_2 q} + \underbrace{\Pi_3 bq) + (\Pi_3 b}_{\Pi_3 q} + \underbrace{\Pi_4 bq) + \ldots}_{\Pi_4 q}\Big] =$$

$$= Mq\left[\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots\right] = \mathbf{Mq}$$, hát persze.

Vagyis hosszú távon az igények $\tilde{\Pi}_k$ hányada érkezik úgy, hogy érkezése után a sorhossz éppen k, ahol

$$\tilde{\Pi}_1 = \frac{M\Pi_0 q + M\Pi_1 pq}{Mq} = \Pi_0 + \Pi_1 p$$

MÁS A KÉT KÉPLET, mert a 0 állapot különleges — ebből jön a <u>TORZÍTÁS</u>.

$$\tilde{\Pi}_k = \frac{M\Pi_{k-1}b + M\Pi_k pq}{Mq} = \Pi_{k-1}\frac{b}{q} + \Pi_k p \quad , k = 2,3\ldots$$

Korábbról: $\Pi_0 = 1 - \frac{q}{p}$ $\quad \Pi_k = \frac{q}{p}\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}$ $\quad k = 1, 2, \ldots$

$b = q(1-p) \quad a = p(1-q) \quad \alpha = 1 - \frac{b}{a}$

Ezeket visszahelyettesítjük, – – – – számolás – –

$$\boxed{\tilde{\Pi}_k = \alpha(1-\alpha)^{k-1} \qquad k = \underline{\underline{1}}, 2, 3 \ldots}$$

Vagyis $(\tilde{\tilde{\Pi}}_k) = Geom(\alpha)$.

Az ergodtétel miatt ez nem lehet más, mint a stac. eloszlás.

[Megj: A „Nagy M-re körülbelül–" érvelés precízzé tehető az ergodtétel segítségével.]

$\square$

Köv: Legyen $\tilde{\tilde{X}}_n$ az n-edik igény érkezésekor az ő előtte sorban állók száma (őt magát tehát nem számoljuk).

Ennyi igény kiszolgálását kell kivárnia, mielőtt sorra kerül, vagyis ennyi igény kiszolgálási ideje lesz az ő várakozási ideje. Persze $\tilde{\tilde{X}}_n = \tilde{X}_n - 1$, ezért a határeloszlása

$$\boxed{\tilde{\tilde{X}}^{stac} = \tilde{X}^{stac} - 1 \sim PesszGeom(\alpha)}$$

Várakozási idő

A várakozási idő határeloszlása az egyetlen stacionárius eloszlás, ezért feltehetjük, hogy a rendszer stacionárius.

~~Legyen~~ $\cancel{\hat{S}_i}$

Az n-edik igény érkezésekor beáll a sorba $\hat{X}_n$-adiknak, előtte áll ~~még~~ $\tilde{X}_n = \hat{X}_n - 1$ másik.

Legyen $\hat{S}_i$ ezek közül az i-ediknek a kiszolgálási ideje (pl $i = \hat{X}_n$-re ez éppen az ő maga kiszolgálási ideje).

$\cancel{\hat{S}_1, \hat{S}_2, \ldots \sim Geom(p)}$ ~~függetlenek egymástól~~ és

~~$i=1$-re~~

(Pontosabban: $i=1$-re az az idő, ami még a kiszolgálásból hátra van.)

Így $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3, \ldots \sim Geom(p)$ függetlenek egymástól és $\tilde{X}_n$-től is, mivel ők csak a jövőbeli érmedobásoktól függnek, $\tilde{X}_n$ pedig csak a múltbeliektől.

Így $W_n = \sum_{i=1}^{\tilde{X}_n} \hat{S}_i$ véletlen tagszámú összeg.

Generátorfüggvények: $g_{\tilde{X}_n}(z) = g_{PessGeom(\alpha)}(z) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z}$ (tétel volt)

$g_{\hat{S}_i}(z) = g_{Geom(p)}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

$\Rightarrow g_{W_n}(z) = g_{\tilde{X}_n}(g_{\hat{S}_i}(z)) = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)\frac{pz}{1-(1-p)z}}$

Ezt egyszerűsítve ... számolás

$$g_{W_n}(z) = \alpha + (1-\alpha)\frac{\beta z}{1-(1-\beta)z}, \quad \text{ahol } \boxed{\beta = p\alpha} = \frac{p-q}{1-q}$$

amiből W_n (határ)eloszlása 0-ban torzított geometriai:

$$\mathbb{P}(W_n = k) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } k=0 \\ (1-\alpha)\beta(1-\beta)^{k-1}, & \text{ha } k=1,2,\dots \end{cases}$$

DE NEM ugyanaz mint a 7. oldalon, és EZ A JÓ.

Késleltetés

Ez ugyanolyan, mint a várakozási idő, csak az igény saját kiszolgálási idejét is bele kell számolni;

Az n-edik igény késleltetése

$$D_n = \sum_{i=1}^{\hat{X}_n} \hat{S}_i$$

véletlen tagszámú összeg ~~Általában~~ a stac. esetben

de ezúttal a tagszám ~~Pessz Geom(α)~~ Geom(α):

$$g_{\hat{X}_n}(z) = g_{Geom(\alpha)}(z) = \frac{\alpha z}{1-(1-\alpha)z}$$

$$g_{\hat{S}_i}(z) = g_{Geom(p)}(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$$

$$\longrightarrow g_{D_n}(z) = g_{\hat{X}_n}\left(g_{\hat{S}_i}(z)\right)$$

$$g_{D_n}(z) = \frac{\alpha \frac{pz}{1-(1-p)z}}{1-(1-\alpha)\frac{pz}{1-(1-p)z}} = \dots = \frac{\alpha p z}{1-(1-\alpha p)z} = g_{Geom(p\alpha)}(z)$$

Vagyis D_n határeloszlása $D^{stac} \sim Geom(p\alpha) = Geom\left(\frac{p-q}{1-q}\right)$

[Hát persze: Ha egy véletlen tagszámú összegben a tagszám is ~~geometriai é~~ $\sim Geom(\frac{1}{6})$ és a tagok $\sim Geom(\frac{1}{2})$, akkor az összeg $\sim Geom(\frac{1}{12})$: addig dobálok egy kockát és egy érmét, amíg ki nem jön a 6-os és a fej <u>egyszerre</u>.]

Megnyugtató ellenőrzés:

$$\boxed{\mathbb{E}D^{stac} = \frac{1}{p\alpha} = \frac{1-q}{p-q}} \quad \text{mert } D^{stac} \sim Geom(p\alpha)$$

Régről tudjuk: $\mathbb{E}X^{stac} = \frac{\mathbb{E}Y(1-\mathbb{E}Y)+\mathrm{Var}Y}{2(\mathbb{E}V-\mathbb{E}Y)} = \frac{q(1-q)+q(1-q)}{2(p-q)} = \frac{q(1-q)}{p-q}$

[Ez mindig igaz, ha $V \in \{0,1\}$]

A Little formula szerint $\boxed{\overline{D} = \frac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y} = \frac{\frac{q(1-q)}{p-q}}{q} = \frac{1-q}{p-q}}$ ✓✓

A foglaltsági periódus hossza

Emlékeztető:

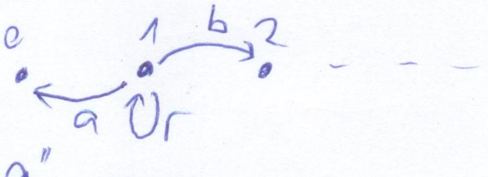
Egy foglaltsági periódus azon szomszédos n-ekből áll, amire ~~x~~ a sorhossz $X_n \neq 0$.

Esetünkben egyszerre csak 1 igény érkezhet $\Longrightarrow$ a foglaltsági periódus elején a sorhossz mindig $= 1$.

Köv: A foglaltsági periódus hossza $=$ a 0-ba való első elérés ideje, ha 1-ből indulunk

~~$\tau := \min\{n>0 \mid X_n = 0$~~

$\tau := \min\{n>0 : X_n = 0\}$, és tegyük fel, hogy $X_0 = 1$.



3 eset lehet:

① Ha $X_1 = 0$ — ennek val. sége „a", — akkor $\tau = 1$.

② Ha $X_1 = 1$ – ennek val. sége r, akkor eltelt 1 idő, de ott vagyunk, ahol indultunk $\Longrightarrow$ ilyenkor $\tau = 1 + \tau'$, ahol τ' a hátralévő idő a 0-ba való első elérésig.

Kulcs-észrevétel 1: τ' ugyanolyan eloszlású, mint τ (persze távolról sem függetlenek). Ez ~~a homogé~~ az időben homogén Markov tulajdonságból jön.

[Ne tévesszen meg senkit, hogy $\tau = 1 + \tau'$, mert ez csak bizonyos val. séggel igaz, más esetben τ' nem is létezik. Így a $\tau \neq \tau'$ csak látszólag ellentmondás.]

③ Ha $X_1 = 2$ – ennek val. sége b –, akkor eltelt 1 idő, és a feladat 2-szer olyan nehéz, mint volt:

$$\tau = 1 + \tau'' + \tau'$$

τ': amíg végül eljutunk 1-ből 0-ba

τ'': amíg visszajutunk 2-ből 1-be

[!! Kihasználtuk, hogy egyszerre csak 1-et lehet lefelé lépni, vagyis egyszerre legfeljebb 1 igényt lehet kiszolgálni.]

Kulcs-észrevétel 2: τ' és τ'' független és azonos eloszlású.

~~Legyen~~ $\cancel{g(z) = g_\tau(z) = g_{\tau'}(z) = g_{\tau''}(z)}$ ~~a τ, τ' és τ'' közös generátor~~

18/20

Legyen $g(z)=\mathbb{E}(z^{\tau})=\mathbb{E}(z^{\tau'})=\mathbb{E}(z^{\tau''})$ a τ, τ' és τ'' közös generátorfüggvénye (hiszen azonos eloszlásúak).

A teljes várható érték tétel miatt

$g(z)=\mathbb{E}(z^{\tau})=\mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{E}(z^{\tau}|X_1=0)$ ← ha $X_1=0$, akkor $\tau=1$

$+\mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{E}(z^{\tau}|X_1=1)$ ← ha $X_1=1$, akkor $\tau=1+\tau'$

$+\mathbb{P}(X_1=2)\mathbb{E}(z^{\tau}|X_1=2)$ ← ha $X_1=2$, akkor $\tau=1+\tau'+\tau''$

$$= a\,\mathbb{E}(z^{1}|X_1=0)+b\,\mathbb{E}(z^{1+\tau'}|X_1=1)+b\,\mathbb{E}(z^{1+\tau'+\tau''}|X_1=2)$$

~~[τ' és τ'' független ... = a E z + r E ... teljesség~~

$$= a\,\mathbb{E}(z^{1}|\cancel{X_1=0})+r\,\mathbb{E}(z^{1+\tau'}|\cancel{X_1=1})+b\,\mathbb{E}(z^{1+\tau'+\tau''}|\cancel{X_1=2})$$

z konstans

ez igazából csak a ~~1+~~τ' létezéséhez kell

$$\underset{\text{függetlenség}}{=} az + rz\,\mathbb{E}(z^{\tau'}) + bz\,\cancel{\mathbb{E}(z^{\tau'})\mathbb{E}(z^{\tau''})}\,\mathbb{E}(z^{\tau''})\mathbb{E}(z^{\tau'})$$

$$= az + rz\,g(z) + bz\,g^2(z)$$

Tétel (épp most jött ki): A $g(z)$ generátorfüggvény a

$$g(z)=az+rz\,g(z)+bz\,g^2(z)$$

egyenlet megoldása, ahol $a=p(1-q)$ $b=q(1-p)$ $r=1-a-b$ a paraméterek, z persze a változó.

$y := g(z)$ jelöléssel jól látszik a másodfokú egyenlet:

$$y = az + rzy + bzy^2 \qquad \text{(ahol } y \text{ az ismeretlen)}$$

$$0 = bzy^2 + (rz-1)y + az \quad \text{, ezt megoldva}$$

$$g(z) = y = \frac{1-rz \pm \sqrt{(rz-1)^2 - 4bzaz}}{2bz}$$

Perse a tétel nem azt mondja, hogy az egyenlet bármelyik megoldása jó lesz generátorfv-nek, csak azt, hogy az általunk keresett ~~meg~~ generátorfv. ezen 2 megoldás egyike.

? A két lehetőség ($\pm\sqrt{\ldots}$) közül melyik generátor-függvény?

Válasz: $g(1) = 1$ mindig:

$$1 = g(1) = \frac{1-r \pm \sqrt{(r-1)^2 - 4ab}}{2b} \overset{1-r=a+b}{=\!=} \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2b}$$

$$= \frac{a+b \pm \sqrt{a^2+2ab+b^2-4ab}}{2b} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2-2ab+b^2}}{2b} =$$

$$= \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2b} = \frac{a+b \pm |a-b|}{2b} \longleftarrow \text{Figyelem, abszolút érték!!}$$

Esetünkben $a-b = p(1-q) - q(1-p) = p - pq - q + pq = p - q > 0$

$$\Rightarrow |a-b| = a-b$$

20/20

ezért $1 = g(1) = \frac{a+b \pm (a-b)}{2b} =$

$\oplus$: $\frac{a+\cancel{b}+a-\cancel{b}}{2b} = \frac{a}{b}$ ↯

$\ominus$: $\frac{a+b-(a-b)}{2b} = \frac{b}{b} = 1$ ✓

Vagyis a $\ominus$-os megoldás a jó:

$$\boxed{g(z) = \frac{1-rz-\sqrt{(rz-1)^2-4abz^2}}{2bz}}$$

Ez teljes információt ad τ eloszlásáról, pl.

~~várható értéket~~ , szórást, magasabb momentumokat könnyű belőle számolni.

nem kell, mert volt rá tételünk

Sorba is lehet fejteni, bár nem lesz valami szép.