Tömegkiszolgálás

pótZH megoldások, 2021 tavasz, 2021.05.17, 10:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

Pontozás általában:

- Minden feladat 8 pontot ér.
- A részpontszámok részletezve vannak az egyes megoldások után.
- Fő szabály: Ha valaki rossz irányba indul el – pl. hibásan ismeri fel az alkalmazandó modellt – és aztán a rossz irányban sok szép dolgot kiszámol, azért nem jár pont.
- Különösen vonatkozik ez arra, ha valaki olyat számol ki, ami a helyes megoldáshoz nem kell – pl. a 3-as feladatban mindent kiszámol a prioritásos csomagkoncentrátorra, amiből semmi sem kell.

1. Egy űrszonda véletlen hosszúságú üzeneteket küld a Földre. Minden üzenet egy 30 bitből álló fejléccel kezdődik. Ezután következik a tényleges adat, aminek hossza (bitekben) geometriai eloszlású, várható értéke 100. Végül egy 10 bit hosszú hibaellenőrző kód következik. Az átvitel során minden bit a többitől függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel sérül. Hosszú távon az üzenetek hány százaléka érkezik meg hibátlanul?

   Megoldás 1: generátorfüggvény-módszer

Legyen N az üzenet hossza bitekben.

Legyen $\xi_k = \begin{cases} 1, \text{ha } \cancel{az} \text{ k-adik bit hibás} \\ 0, \text{ha nem} \end{cases}$ így $\xi_k \sim B\left(\frac{1}{1000}\right)$

és az $S_N := \sum_{k=1}^{N} \xi_k$ véletlen tagszámú összeg a hibás bitek száma.

A kérdés $\mathbb{P}(\text{mind hibátlan}) = \mathbb{P}(S_N = 0) = ?$

Ez kijön pl. a generátorfüggvényből: $\mathbb{P}(S_N = 0) = g_{S_N}(0)$

de S_N véletlen tagszámú összeg:

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_\xi(z))$$

ebből $\xi \sim B\left(\frac{1}{1000}\right) \Rightarrow g_\xi(z) = \frac{999}{1000} + \frac{1}{1000} z$

$N = 40 + X$ ahol $X \sim Geom\left(\frac{1}{100}\right)$

$$\Rightarrow g_N(z) = z^{40} g_X(z) = z^{40} \frac{\frac{1}{100} z}{1 - \frac{99}{100} z}$$

A kompozíció képletét kár lenne kiírni:

$$g_\xi(0) = \frac{999}{1000} + \frac{1}{1000} \cdot 0 = \frac{999}{1000}$$

$\Downarrow$

$$g_{S_N}(0) = g_N(g_\xi(0)) = g_N\left(\frac{999}{1000}\right) = \left(\frac{999}{1000}\right)^{40} \frac{\frac{1}{100} \frac{999}{1000}}{1 - \frac{99}{100} \frac{999}{1000}}$$

$$\approx 0.873 = 87.3\%$$

Végül:

A nagy számok törvénye miatt hosszú távon az üzenetek 87,3%-a lesz hibátlan.

Megoldás 2: teljes valószínűség tétel

Legyen N az üzenet hossza bitekben.

Ha $N=k$, akkor $\mathbb{P}(\text{mind hibátlan}) \overset{\text{függetlenség}}{=} \left(\frac{999}{1000}\right)^k$, vagyis

$$\mathbb{P}(\text{az üzenet hibátlan} \mid N=k) = \left(\frac{999}{1000}\right)^k$$

Mivel $N=40+X$ ahol $X \sim \mathrm{Geom}\left(\overset{=:p}{\frac{1}{100}}\right)$ a tényleges adat hossza, ezért

$$\mathbb{P}(N=k)=\mathbb{P}(X=k-40)=p(1-p)^{k-40-1} \qquad k=41,42,43\ldots$$

Így a $\boxed{\text{teljes valószínűség tétel}}$ szerint

$$\underline{\mathbb{P}(\text{az üzenet hibátlan})} = \sum_{k=41}^{\infty} \mathbb{P}(N=k)\,\mathbb{P}(\text{hibátlan} \mid N=k) =$$

$$= \sum_{k=41}^{\infty} \frac{1}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{k-41}\left(\frac{999}{1000}\right)^{k} \underset{\text{helyettesítés}}{\overset{k:=\ell+41}{=}}$$

$$= \frac{1}{100}\left(\frac{999}{1000}\right)^{41} \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{99}{100}\cdot\frac{999}{1000}\right)^{\ell} \underset{\text{összege}}{\overset{\text{mértani sor}}{=}}$$

$$= \frac{1}{100}\left(\frac{999}{1000}\right)^{41} \frac{1}{1-\frac{99}{100}\cdot\frac{9999}{1000}} \approx 0{,}873 = 87{,}3\%$$

Végül:

A nagy számok törvénye miatt hosszú távon az üzenetek 87,3%-a lesz hibátlan.

Pontozás:

- 2 pont a véletlen tagszámú összeg vagy a teljes valószínűség probléma felismerése, jelölések helyes bevezetése
- 2 pont a tagszám eloszlásának helyes felírása (a fix biteket beleszámítva vagy azt leválasztva)
- 1 pont a tagok generátorfüggvénye vagy a feltételes valószínűségek felírása
- 2 pont a tételek alkalmazása, a helyes valószínűség megadása
- 1 pont a hivatkozás a nagy számok törvényére, hogy az arány hosszú távon éppen a valószínűség.

2. Egy véletlen számítógépes program a futása során 5-féle állapotban lehet 0-tól 4-ig. Minden lépésben átlép egy szomszédos állapotba, éspedig a k-adik állapotból $\frac{4-k}{4}$ valószínűséggel felfelé, a maradék $\frac{k}{4}$ valószínűséggel pedig lefelé (az előzményektől függetlenül). (Így az 0-s állapotból biztosan felfelé, a 4-esből biztosan lefelé lép.) Kezdetben a program a 0 állapotban van.

   a.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 365 lépés után ismét a 0 állapotban lesz?

   b.) Az idő mekkora hányadát tölti a program a $\{0, 1\}$ állapotokban hosszú távon?

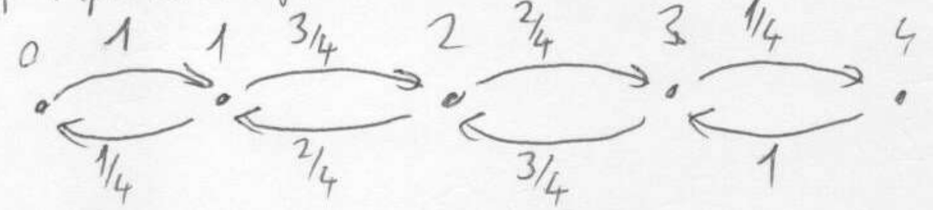
   c.) **Bónusz kérdés:** Mi a helyzet, ha 100 állapot van és a k-adikból $\frac{99-k}{99}$ val.séggel lép felfelé, a maradék val.séggel pedig lefelé? Az idő mekkora hányadát tölti így hosszú távon a k állapotban?

Megoldás:

Legyen X_n a program állapota n lépés után.

$X_n \in \{0,1,2,3,4\}$ időben homogén Markov lánc, $X_0=0$.

S: a gráf-reprezentációja



a.) A lánc láthatóan periodikus $d=2$ periódussal:

0-ból indulva páros (ptl) sok lépés után csak páros (ptl) állapotban lehet

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{365}=0 \mid X_0=0) = \underline{\underline{0}}.$$

b.) A lánc irreducibilis és ~~aperiodikus~~ véges állapotterű, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga $\xrightarrow[\text{1 valószínűséggel}]{\text{idő}\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i f(i)$

ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ezt alkalmazva az

$$f(i) := \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in \{0,1\} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$$

függvényre:

a $\{0,1\}$-ben töltött idő aránya hosszú távon $= \underline{\pi_0+\pi_1}$

A stac. eloszlás számolásához használjuk ki, hogy X_n születési-halálozási folyamat:

$$\frac{\pi_1}{\pi_0} = \frac{1}{1/4}; \quad \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{3/4}{2/4}; \quad \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{2/4}{3/4}; \quad \frac{\pi_4}{\pi_3} = \frac{1/4}{1}.$$

Ebből $\pi_1 = 4\pi_0$; $\pi_2 = 6\pi_0$; $\pi_3 = 4\pi_0$; $\pi_4 = \pi_0$

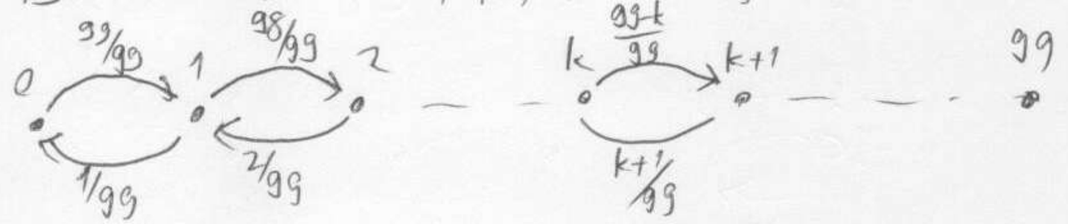
vagyis $\pi = \pi_0(1, 4, 6, 4, 1)$. ~~A normáláshoz~~

A normáláshoz $\sum_{k=0}^{4} \Pi_k = 1$ kell, vagyis $\Pi_0 = \frac{1}{16}$,

$$\Pi = \left(\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16} \right)$$

$\Rightarrow$ A válasz $\underline{\Pi_0 + \Pi_1} = \frac{5}{16} = 0.3125 = \underline{31.25\%}$

c.) Bónusz: Ha $S = \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ és a gráf



akkor $\Pi_{k+1} = \dfrac{\frac{99-k}{99}}{\frac{k+1}{99}} \Pi_k = \dfrac{99-k}{k+1} \Pi_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots, 98,$

amiből $\Pi_1 = \frac{99}{1} \Pi_0$

$$\Pi_2 = \frac{99 \cdot 98}{1 \cdot 2} \Pi_0$$

$$\Pi_3 = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Pi_0$$

$$\vdots$$

$$\Pi_k = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot (99-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \Pi_0$$

$$\vdots$$

$$\Pi_{99} = \frac{99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99} \Pi_0$$

$$\boxed{\Pi_k = \binom{99}{k} \Pi_0} \qquad k = 0, 1, \dots, 99$$

normálás

Ebből felismerhető, hogy $\boxed{\Pi \text{ a binomiális eloszlás}}$

$n = 99$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel: $\Pi_0 = \frac{1}{2^{99}}$,

$$\boxed{\Pi_k = \binom{99}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{99-k} = \binom{99}{k} \frac{1}{2^{99}} \qquad k = 0, 1, \dots, 99}$$

Pontozás:

a.) 4 pont. Azon belül is 0 pontot ér bármiféle számolás vagy érvelés a stacionárius eloszlásról.

b.) 4 pont, ebből

- 1 a használt Markov lánc tisztázása, jelölések bevezetése
- 2 pont a stacionárius eloszlás helyes kiszámolása
- 1 pont a hivatkozás az ergodtételre, feltételek ellenőrzése, helyes végeredmény.

c.) Bónusz: 2 pont; ebből 1 a binomiális eloszlás felismerése, 1 a helyes indoklás.

3. Móricka minden nap pontosan 1 házi feladatot tud megcsinálni, szigorúan délután. Kétféle házi feladatot kap. Egyrészt Rém Fontos professzor minden délelőtt az előzményektől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel felad neki egy „rém sürgős” feladatot, amit még aznap meg kell csinálni. Másrészt Szintén Fontos docens úr minden délelőtt (az előzményektől és Rém Fontos professzortól függetlenül) $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ad fel feladatot, ám ha már felad, akkor rögtön kettőt. Ezek „közepesen sürgős” feladatok: ezeket is minél előbb meg kell csinálni. Móricka csak akkor tud tanulni, ha nincs megoldandó házi feladata. (Tanulnivalója viszont bőven van, így sose unatkozik.)

   Móricka, legnagyobb bánatára, már az első tanítási nap délelőttjén kapott házi feladatot. Várhatóan hányadik napon fog tudni először tanulni?

   Megoldás:

Észrevétel: A tanulás szempontjából mindegy, hogy ki adja a HF-eket: mindet meg kell csinálni.

Legyen X_n a Mórickára váró HF-ek száma az n-edik napon délben. Ez eleget tesz az

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1} \quad \text{sorhossz-evolúciós}$$

egyenletnek, ahol $V_n \equiv 1$ a Móricka kapacitása

Y_n az n-edik napon érkező HF-ek száma (a két tanártól összesen).

A kérdés a foglaltsági periódus hosszának várható értéke

(plusz 1, mert a ~~periódus ut~~ foglaltsági periódus utáni napon tud először tanulni.)

Előadásról tudjuk:

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix}\text{foglaltsági}\\ \text{periódus}\\ \text{hossza}\end{pmatrix} = \frac{\mathbb{E}Y_n}{\mathbb{P}(Y_n \geq 1)(\mathbb{E}V_n - \mathbb{E}Y_n)}$$

Ehhez • $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(\text{egyik tanár se ad HF-et}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

• $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{P}(\text{prof. felad 1-et}) \cdot 1 + \mathbb{P}(\text{docens felad 2-t}) \cdot 2 =$

$$= \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4}$$

JÓ HÍR: $\mathbb{E}Y_n < \mathbb{E}V_n$, a rendszer stabil

• $\mathbb{E}V_n = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\begin{pmatrix}\text{periódus}\\ \text{hossza}\end{pmatrix} = \frac{3/4}{7/16\,(1 - 3/4)} = \frac{48}{7} \approx 6.86 \Rightarrow$$

$\boxed{\text{Várható értékben a 7.86-odik napon tanul először}}$

Pontozás:

- 2 pont a kérdés (foglaltsági periódus várható értéke) helyes felismerése
- 1 pont annak felismerése, hogy a prioritásoknak nincs jelentősége
- 2 pont a sorhossz-evolúciós modell felírása az összes jelölés helyes bevezetésével
- 1 pont az 1 nap alatt érkező HF-ek számának eloszlásának helyes kiszámolása
- 1 pont a stabilitás vizsgálata
- 1 pont a megfelelő képlet alkalmazása, helyes végeredmény megadása

4. Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfa-részecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül).

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első észlelésre 1 másodpercnél többet kell várni?

   b.) Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik észlelésre legalább 2 másodpercet kell várni?

   c.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első 2 másodpercben legalább 3 részecskét észlelünk, de ebből egy sem nagy energiájú?

   Megoldás:

A kis- és nagyenergiájú részecskék egy-egy független Poisson-folyamat szerint keletkeznek. Az észlelt kis- és nagyenergiájú részecskék folyamata ezek ritkításai, így ők is független Poisson-folyamatok $\lambda_{kicsi} = 3 \cdot \frac{2}{10} = 0.6$,

illetve $\lambda_{nagy} = 1 \cdot \frac{9}{10} = 0.9$

intenzitással. [Az időegység másodperc.]

Mivel függetlenek az egyesítésük, vagyis az összes észlelés folyamata is Poisson-folyamat,

$$\lambda_{össz} = \lambda_{kicsi} + \lambda_{nagy} = 1.5 \text{ intenzitással.}$$

a.) Legyen T az első észlelés ideje (másodpercben).

Így $T \sim Exp(\lambda_{össz}) = Exp(1.5)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T > 1) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_{össz} \cdot 1}\right) = e^{-1.5} \approx 0.2231$$

AVAGY:

Legyen X_1 az 1 másodperc alatt észlelt részecskék száma. Így $X_1 \sim Poi(\lambda_{össz} \cdot 1)$,

és $\mathbb{P}\left(\begin{array}{c}1 \text{ másodperc } \cancel{\text{alatt}} \text{ kevés} \\ \text{az első észlelésig}\end{array}\right) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = e^{-\lambda_{össz} \cdot 1} = e^{-1.5}$

≈ 0.2231.

b.) Legyen X_2 a 2 másodperc alatt észlelt részecskék száma. [Mondjuk anom belebírtve a pontosan 2 másodperc-kor tikotiket – de ez mindegy]

Ekkor $X_2 \sim Poi(\lambda_{össz} \cdot 2) = Poi(3)$, és

$$\mathbb{P}\begin{pmatrix}\text{a 3. észlelésre}\\ \geq 2 \text{ másodpercet}\\ \text{kell várni}\end{pmatrix} = \mathbb{P}(X_2 \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = k)$$

$$= e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2}\right) = 8.5 \cdot e^{-3} \approx 0.423$$

c.) Legyen Y_2 a 2 másodperc alatt észlelt kis

Z_2 — // — észlelt nagy

energiájú részecskék száma.

Így $Y_2 \sim Poi(\lambda_{kicsi} \cdot 2) = Poi(1.2)$
$Z_2 \sim Poi(\lambda_{nagy} \cdot 2) = Poi(1.8$ és függetlenek

A kérdés:

$$\mathbb{P}(X_2 \geq 3 \text{ és } Z_2 = 0) \overset{X_2 = Y_2 + Z_2}{=\!=\!=} \mathbb{P}(Y_2 \geq 3 \text{ és } Z_2 = 0) =$$

$$\overset{\text{függetlenség}}{=\!=\!=} \mathbb{P}(Z_2 = 0)\,\mathbb{P}(Y_2 \geq 3) = e^{-1.8}\left[1 - e^{-1.2}\left(1 + 1.2 + \frac{(1.2)^2}{2}\right)\right]$$

$$\approx 0.1653 \cdot 0.1205 \approx 0.0199 \approx 2\%$$

[VIGYÁZAT!! Z_2 és Y_2 NEM független.]

Pontozás:

a.) 2 pont. Azon belül is 1 pont a Poisson folyamatok ritkításának és egyesítésének helyes felismerése, ráták kiszámolása. feltételek (különösen a függetlenség) ellenőrzése

b.) 2 pont. Ebből 1 a használt jelölések helyes bevezetése.

c.) 4 pont. Ebből

- 1 a használt jelölések helyes bevezetése
- 1 annak a valószínűsége, hogy nagy energiájú részecskéből egyet se figyelünk meg
- 1 annak a valószínűsége, hogy kis energiájú részecskéből legalább hármat megfigyelünk
- 1 a függetlenség felismerése és alkalmazása
- Különösen nem ér pontot annak számolása, hogy mekkora valószínűséggel lesz összesen legalább 3 megfigyelés.

5. Egy telefonközpont által kezelt hívások Poisson folyamat szerint kezdődnek, óránként átlagosan 6. Minden hívás exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, ami a többitől és az előzményektől is független, várható értéke 10 perc. A központ kapacitása nagy, így az egyszerre zajló hívások száma nincs korlátozva. Hosszú távon az idő hány százalékában lesz az éppen zajló hívások száma 3-nál kevesebb?

   Megoldás:

Legyen $N(t)$ a folyamatban lévő hívások száma t idő elteltével. (Az időt mérjük órában). Ez folytonos idejű Markov lánc, ráadásul születési-halálozási folyamat, mert $\mathbb{P}$(2 hívás pont egyszerre kezdődik) =

= $\mathbb{P}$(2 hívás pont egyszerre végződik) = 0.

Fontos: A hívások nem várnak egymásra: az éppen folyamatban lévők közül bármelyik véget érhet, ezért

- az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- a felfelé ugrás rátája minden állapotból $\lambda = 6$ $\left(\frac{\text{ugrás}}{\text{óra}}\right)$
- a lefelé ugrás rátája a $k=1$ állapotból $\mu = \frac{1}{10\text{perc}} = 6\ \frac{1}{\text{óra}}$

hiszen az az egyetlen hívás $\sim Exp(6)$ idő után ér véget.

- A $k=2$ állapotból viszont már $2\cdot\mu$ rátával ~~ug~~ történik lefelé ugrás, mert ilyen rátával ér véget a 2 hívás közül valamelyik.

Hasonlóan: a gráf-reprezentáció

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "3\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 4 \arrow[l, bend left, "4\mu"] \cdots
\end{tikzcd}$$

[Ez az M/M/∞ modell] Irreducibilis.

Ebből felírható a(z egyetlen) stacionárius eloszlás:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\pi_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\pi_0$$

$$\pi_3 = \frac{\lambda}{3\mu}\pi_2 = \frac{\lambda^3}{3\cdot 2\cdot \mu^3}\pi_0$$

$$\vdots$$

$$\pi_k = \frac{\lambda}{k\mu}\pi_{k-1} = \frac{\lambda^k \pi_0}{k(k-1)\dots 3\cdot 2\cdot \mu^k} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\pi_0$$

$$\vdots$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \pi$ a Poisson-eloszlás $\frac{\lambda}{\mu}$ paraméterrel:

esetünkben $\frac{\lambda}{\mu} = 1 \Rightarrow \pi = Poi(1)$

(és mellesleg $\pi_0 = e^{-1}$).

~~Mivel N(t) irreduc:~~

Mivel találtunk stac. eloszlást, a M. lánc stabil.

Mivel stabil születési-halálozási folyamat,

Ezért, mivel $N(t)$ stabil születési-halálozási folyamat, az ergodtétel szerint a $\{0, 1, 2\}$-ben eltöltött idő hányada hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}e^{-1} \approx 0.92 = \underline{\underline{92\%}}$$

Pontozás:

- 1 pont a Markov lánc helyes bevezetése, jelölés, a folytonos idejű születési-halálozási folyamat felismerése
- 1 pont az érkezési ráta megadása, az időegység rögzítésével
- 2 pont a kiszolgálási ráták megtalálása - különös tekintettel annak felismerésére, hogy a ráta függ az állapottól
- 1 pont ez alapján a stacionárius eloszlást megadó rekurzió helyes felírása
- 1 pont a rekurzió zárt alakra hozása
- 1 pont a helyes normálás (a Poisson eloszlás felismerésével, vagy esetleg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ azonosság alkalmazásával
- 1 pont az ergodtétel helyes alkalmazása, a helyes válasz megadása.