

Tömegkiszolgálás

pótZH, 2021 tavasz, 2021.05.17, 10:00

Munkaidő: 90 perc. A megoldásokat fényképezve vagy scannelve kérem vissza. Aki ezt nem tudja megoldani, kérem, jelezze!

Minden írásos segédeszköz illetve számológép/számítógép használható, de a feladatokat **önállóan** kell megoldani, vagyis más embertől kérdezni és segítséget elfogadni nem szabad. Ez alól egyedüli kivétel a tárgy előadója.

Minden megoldást részletesen indokolni kell.

1. Egy űrszonda véletlen hosszúságú üzeneteket küld a Földre. Minden üzenet egy 30 bitből álló fejléccel kezdődik. Ezután következik a tényleges adat, aminek hossza (bitekben) geometriai eloszlású, várható értéke 100. Végül egy 10 bit hosszú hibaellenőrző kód következik. Az átvitel során minden bit a többitől függetlenül $\frac{1}{1000}$ valószínűséggel sérül. Hosszú távon az üzenetek hány százaléka érkezik meg hibátlanul?
2. Egy véletlen számológépes program a futása során 5-féle állapotban lehet 0-tól 4-ig. Minden lépésben átlép egy szomszédos állapotba, és pedíg a k -adik állapotból $\frac{4-k}{4}$ valószínűséggel felfelé, a maradék $\frac{k}{4}$ valószínűséggel pedig lefelé (az előzményektől függetlenül). (Így az 0-s állapotból biztosan felfelé, a 4-esből biztosan lefelé lép.) Kezdetben a program a 0 állapotban van.
 - a.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 365 lépés után ismét a 0 állapotban lesz?
 - b.) Az idő mekkora hányadát tölti a program a $\{0, 1\}$ állapotokban hosszú távon?
 - c.) **Bónusz kérdés:** Mi a helyzet, ha 100 állapot van és a k -adikból $\frac{99-k}{99}$ valószínűséggel lép felfelé, a maradék valószínűséggel pedig lefelé? Az idő mekkora hányadát tölti így hosszú távon a k állapotban?
3. Móricka minden nap pontosan 1 házi feladatot tud megcsinálni, szigorúan délután. Kétféle házi feladatot kap. Egyrészt Réms Fontos professzor minden délelőtt az előzményektől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel felad neki egy „rém sürgős” feladatot, amit még aznap meg kell csinálni. Másrészt Szintén Fontos docens úr minden délelőtt (az előzményektől és Réms Fontos professzortól függetlenül) $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ad fel feladatot, ám ha már felad, akkor rögtön kettőt. Ezek „közepesen sürgős” feladatok: ezeket is minél előbb meg kell csinálni. Móricka csak akkor tud tanulni, ha nincs megoldandó házi feladata. (Tanulnivalója viszont bőven van, így sose unatkozik.)

Móricka, legnagyobb bánatára, már az első tanítási nap délelőttjén kapott házi feladatot. Várhatóan hányadik napon fog tudni először tanulni?
4. Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfa-részecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül).
 - a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első észlelésre 1 másodpercnél többet kell várni?
 - b.) Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik észlelésre legalább 2 másodpercet kell várni?
 - c.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első 2 másodpercben legalább 3 részecskét észlelünk, de ebből egy sem nagy energiájú?

5. Egy telefonközpont által kezelt hívások Poisson folyamat szerint kezdődnek, óránként átlagosan 6. Minden hívás exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, ami a többitől és az előzményektől is független, várható értéke 10 perc. A központ kapacitása nagy, így az egyszerre zajló hívások száma nincs korlátozva. Hosszú távon az idő hány százalékában lesz az éppen zajló hívások száma 3-nál kevesebb?