

Tartalomjegyzék

1. Valószínűségszámítás alapok	1
2. Diszkrét idejű Markov láncok	6
3. Generátorfüggvény-módszer	32
4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek	44
5. Poisson folyamat	87
6. Laplace-transzformáció	96
7. Folytonos idejű Markov láncok	97
8. Folytonos idejű sorbanállási modellek	114

1. Valószínűségszámítás alapok

1.1 Elgurítunk egy piros dobókockát, és a dobott számot X -szel jelöljük. Ezután elgurítunk X darab zöld dobókockát, és Y -nal jelöljük a zöld kockákkal dobott számok *összegét*. Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:

Jelöljük m -mel egyetlen kockadobás eredményének várható értékét, vagyis $m = \frac{7}{2}$. A teljes várható érték tétel szerint

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) \mathbb{E}(Y|X = k) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) [km] = \\ &= \left[\sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) \cdot k \right] m = m \cdot m = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4} = 12.25\end{aligned}$$

1.2 Legyen $\lambda > 0$ rögzített. $n = 1, 2, 3, \dots$ -re legyen $p_n = \frac{\lambda}{n}$, és legyen az X_n valószínűségi változó eloszlása $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$. Rögzített $k \in \mathbb{N}$ -re számoljuk ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = k)$$

határértéket!

(*Tipp:* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n}\right)^n = e^c$.)

Megoldás:

Lényeg, hogy $k \in \mathbb{N}$ rögzített. Mivel az $n \rightarrow \infty$ eset érdekel, feltehetjük, hogy $n > k$. Így

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

előre hozzuk, ami látványosan nem függ n -től

$$\frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k \text{ db}}} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k =$$

Van egy csomó tényező, ami 1-hez tart

mind egyik 1-hez tart és végső az alap 1-hez tart, a kitevő fix
(rögzített) sokan vannak

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{k \text{ db}} e^{-\lambda} 1^k = \underline{\underline{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}}$$

Hát persze: nagy n -re (és rögzített k -ra) és kicsi p -re a binomiális eloszlás Poissonnal közelíthető

1.3 Pistikék padlásán egy villanykörte van felszerelve, aminek az élettartama exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. Pistike csak évente kétszer megy fel a padlásra: december 23-án a karácsonyfadíszekért, illetve január 23-án, eltenni a karácsonyfadíszeket.

Legutóbb, amikor Pistike december 23-án felment, azt vette észre, hogy az égőt felkapcsolva felej-

tette (nyilván január 23-án, amikor legutóbb ott járt), de már kiégett. Mi annak a valószínűsége, hogy az égő több, mint fél évet világított feleslegesen?

Megoldás: Legyen X a villanykörte élettartama. Hónapokban számolva X eloszlása $Exp(1/12)$, kihasználva, hogy az exponenciális eloszlás paramétere a várható érték (1 év = 12 hónap) reciprokával egyezik meg.

Az exponenciális eloszlás örökifjúsága miatt feltehetjük, hogy januárban hagyta felkapcsolva. A kérdéses valószínűség:

$$\mathbb{P}(X > 6 | X < 11) = \frac{\mathbb{P}(6 < X < 11)}{\mathbb{P}(X < 11)} = \frac{(1 - e^{-11/12}) - (1 - e^{-6/12})}{1 - e^{-11/12}} = \frac{e^{5/12} - 1}{e^{11/12} - 1}$$

1.4 Pistike minden nyári este tesz egy sétát, és közben az eget nézi, hullócsillagokat figyelve. Egy este átlagosan 4-et szokott látni. Ennek megfelelően, ha 4-et vagy többet lát, akkor vidáman megy haza, ha viszont kevesebbet, akkor bánatosan.

Pistike augusztus 16-án bánatosan ment haza. Ezt tudva, mennyi a valószínűsége, hogy egyetlen hullócsillagot sem látott?

(Rávezető kérdés: Legyen X a Pistike által augusztus 16-án látott hullócsillagok száma - ami persze egy valószínűségi változó. Mi X eloszlása? Pontosabban: Milyen eloszlással jó modellezni X -et?)

Megoldás: X -et Poisson eloszlással modellezzük, mert nagyon sok meteor próbálkozik azzal, hogy pont Pistike szeme láttára égjen el aznap este, és mindegyik kis valószínűséggel jár sikerrel, egymástól függetlenül. X pedig a sikeres próbálkozások száma. A szöveg szerint $\mathbb{E}X = 4$, így $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = 4$. Vagyis minden $k = 0, 1, 2, \dots$ -re

$$p_k := \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-4} \frac{4^k}{k!}.$$

Így a kérdésre a válasz a feltételes valószínűség definíciója szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0 | X < 4) &= \frac{\mathbb{P}(X = 0 \text{ és } X < 4)}{\mathbb{P}(X < 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(X < 4)} = \frac{p_0}{p_0 + p_1 + p_2 + p_3} = \\ &= \frac{e^{-4}}{e^{-4} (1 + 4 + \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{6})} = \frac{3}{71} \approx 0.042 = 4.2\%. \end{aligned}$$

1.5 Pistike, Jancsika és Móricka matricákat gyűjt, amiket a csokihoz adnak a boltban. Hatféle matrica van, minden csokihoz egyet adnak, mindegyiket azonos valószínűséggel (az előzményektől függetlenül).

- a.) Pistikének már három féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy négyféle legyen?
- b.) Jancsikanak már k -féle matricája van. Várhatóan hány csokit kell kibontania, hogy $(k + 1)$ -féle legyen? (Itt $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.)
- c.) Móricka csak most kezdi a gyűjtést. Mennyi a teljes matrica-készlet kigyűjtéséhez kibontandó csokik számának várható értéke és szórása?

Megoldás:

a.) Mindaddig, amíg 3 matricája van, ~~$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ valószínűséggel~~
 minden lépésben $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ valószínűséggel kap új fejtét.

Vagyis az első sikerhez szükséges próbálkozások száma
 $\sim \text{Geom}(\frac{1}{2})$. Ennek várható értéke $E(\text{Geom}(\frac{1}{2})) = \underline{\underline{2}}$

b.) Ugyanígy, ha k matricája van, akkor a siker valószínűsége
 $\frac{6-k}{6}$, a szükséges próbálkozások száma $\sim \text{Geom}(\frac{6-k}{6})$,
 ennek várható értéke $E(\text{Geom}(\frac{6-k}{6})) = \frac{6}{6-k}$

c.) Legyen X_k a $(k+1)$ -edik matricára megszerzéséhez szükséges
 próbálkozások száma onnantól kezdve, hogy a
 k -adik már megvan, $k = 0, 1, \dots, 5$.

A b.) rész szerint $X_k \sim \text{Geom}(\frac{6-k}{6})$, ~~és ráadásul~~
~~független~~ $E X_k = \frac{6}{6-k}$

A kibontandó csokit teljes száma $S = X_0 + X_1 + \dots + X_5$.

• Ennek várható értéke $\sum_{k=0}^5 \frac{6}{6-k} = 6 \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right] = 2.45 \cdot 6$
 $E S = \sum_{k=0}^5 E X_k = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 14.7$

• Az X_k -k ráadásul függetlenek is, ezért

$\text{Var } S = \sum_{k=0}^5 \text{Var } X_k$, ahol $\text{Var } X_k = \frac{1 - \frac{6-k}{6}}{\left(\frac{6-k}{6}\right)^2} = \frac{6-k}{(6-k)^2}$

$\Rightarrow \text{Var } S = 6 \left[\frac{0}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{2^2} + \frac{5}{1^2} \right] = 38.99$
 ~~$D S \approx 6.24$~~
 $D S \approx 6.24$

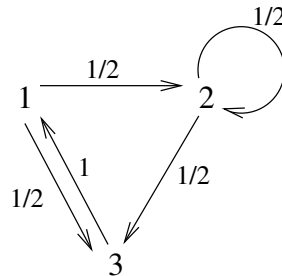
2. Diszkrét idejű Markov láncok

2.1 Egy diszkrét idejű, időben homogén X_n Markov lánc állapottere $S = \{1, 2, 3\}$. A Markov lánc az 1-es állapotból 50 – 50% valószínűséggel ugrik a 2-es és 3-as állapotba. Ha a 2-es állapotban van, akkor 50% valószínűséggel ott is marad, 50% valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 3-as állapotból mindig az 1-esbe ugrik. A Markov lánc X_0 kezdeti állapotát kockadobással sorsoljuk, egyenlő esélyt adva mindhárom állapotnak.

- Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját.
- Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát.
- Írjuk fel a Markov lánc kezdeti eloszlás vektorát.
- Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat kezdetén a 131223 állapot-sorozatot figyeljük meg (a 0-dik (kezdő) állapotot is beleértve)?
- Mennyi a $\mathbb{P}(X_4 = 1 \mid X_0 = 1)$ átmenetvalószínűség?
- Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.
- Közéltőleg mennyi a valószínűsége, hogy 100 lépés után a Markov lánc a 2-es állapotban lesz?
- Legyen az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ és $f(3) = 5$. Mennyi lesz az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon?

Megoldás:

- A gráf-reprezentáció



- Az átmenetmátrix $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, mert mindhárom állapotnak azonos esélyt adtunk.
-

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(131223) &= \mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 2, X_5 = 3) = \\ &= \pi_1(0)P_{13}P_{31}P_{12}P_{22}P_{23} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

- e.) Az 1-es állapotból az 1-esbe négy lépésben visszajutni csak kétféleképpen lehet: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, vagy $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Ezek feltételes valószínűsége (feltéve, hogy $X_0 = 1$) $P_{12}P_{22}P_{23}P_{31} = \frac{1}{8}$, illetve $P_{13}P_{31}P_{13}P_{31} = \frac{1}{4}$, így

$$\mathbb{P}(X_4 = 1 | X_0 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

- f.) Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy π stacionárius eloszlás (sorvektor) van, éspedig a

$$(P^T - I)\pi^T = 0$$

lineáris egyenletrendszer egyetlen olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. (Itt I az egységmátrix.) Jelen esetben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

vagyis a lineáris egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Ezt megoldjuk pl. Gauss eliminációval:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

amiből $\pi_1 = \pi_3$ és $\pi_1 = \pi_2$. Így pl. a $\pi_3 := 1$ önkényes választással megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egy megoldását: $\tilde{\pi} = (1 \ 1 \ 1)$. Ez még nem az, amit keresünk, mert az elemek összege nem 1, hanem $1 + 1 + 1 = 3$, ezért a keresett megoldást úgy kapjuk, hogy ezt a $\tilde{\pi}$ -t lenormáljuk, vagyis leosztjuk 3-mal:

$$\pi = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right).$$

- g.) A Markov lánc irreducibilis, aperiodikus és véges állapotterű, $n = 100$ lépés pedig hosszú idő, ezért a Markov láncok alaptétele értelmében a kezdeti eloszlástól függetlenül

$$\mathbb{P}(X_{100} = 2) \approx \pi_2 = \frac{1}{3}.$$

- h.) Az f függvényt célszerű oszlopvektor formájába írni:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért az ergodtétel értelmében az $f(X_n)$ sorozat (idő)átlaga hosszú távon 1 valószínűséggel a stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez tart:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})}{n} &= \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 5 = 2. \end{aligned}$$

2.2 Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a 0, 1, 2, 3, 4 állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy érve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov láncsal!

- Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.
- Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440” megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)
- Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a valószínűsége, hogy 3 időegység múlva a program éppen az 1-es részfeladaton dolgozik?
- Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?
- Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?
- A programunk processzor-igénye üresjáratban 1%, az 1, 2, 3, 4 részfeladatok végrehajtása során pedig rendre 10%, 30%, 50% illetve 99%. mennyi az átlagos processzor-terhelés hosszú távon?

Megoldás:

- Az n idő elteltével felvett állapotot jelöljük X_n -nel. Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. P sorait és oszlopait ilyen sorrendbe írva

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{P}(X_0 \dots X_9 = 0001223440 | X_0 = 0) = P_{00} \cdot P_{00} \cdot P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{22} \cdot P_{23} \cdot P_{34} \cdot P_{44} \cdot P_{40} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{81}{64000}$.
- A lehetséges utak a 0001, a 0011 és a 0111. Ezek valószínűségeit az előző pontbeli módon kiszámolva és összeadva $\mathbb{P}(X_3 = 1 | X_0 = 0) = P_{00}P_{00}P_{01} + P_{00}P_{01}P_{11} + P_{01}P_{11}P_{11} = \frac{9}{10} \frac{9}{10} \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \frac{1}{10} \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$.

d.) Az 1000 időegység elteltével kialakuló valószínűségeket közelítsük a Markov lánc stacionárius eloszlásával! Ehhez a $\pi P = \pi$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol a π ötelemű sorvektor tartalmazza a stacionárius eloszlást. Átrendezés után $(P^T - \mathbb{I})\pi^T = \underline{0}$, ahol \mathbb{I} az 5×5 -ös egységmátrixot, $\underline{0}$ pedig az öt nullából álló oszlopvektort jelöli. A lineáris egyenletrendszerek szokásos mátrix-jelölésével

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{array} \right).$$

Ezt persze eliminációval oldjuk meg. Egy sor kiesik, ahogy kell, és a végén (pl.) az marad, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

vagyis az egyenletrendszer egyik megoldása az $(5 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ vektor. A stacionárius eloszlás ennek valószínűségi vektorra normált változata (ahol az elemek összege 1), vagyis

$$\pi = \left(\frac{5}{9} \ \frac{1}{9} \ \frac{1}{9} \ \frac{1}{9} \ \frac{1}{9} \right).$$

Végül a feladat kérdésére a válasz:

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0 | X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{5}{9}.$$

e.) A Markov láncunk véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, ezért az ergodtétel szerint hosszú távon a 0-s állapot bekövetkezési gyakorisága majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti valószínűséghez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k : 1 \leq i \leq n \text{ és } X_k = 0\} = \pi_0 = \frac{5}{9} \approx 55.6\%.$$

f.) Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a processzorigény (százalékban számolva) az állapot függvényében:

$$f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = 0 \\ 10, & \text{ha } i = 1 \\ 30, & \text{ha } i = 2 \\ 50, & \text{ha } i = 3 \\ 99, & \text{ha } i = 4 \end{cases},$$

ami helyett elég egy oszlopvektort leírni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 99 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint f időátlagja majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti sokaságátlaghoz. Sokféle különböző jelöléssel leírva ugyanazt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) &= \int_S f \, d\pi = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \pi_3 \pi_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 30 \\ 50 \\ 99 \end{pmatrix} \\ &= 1\pi_0 + 10\pi_1 + 30\pi_2 + 50\pi_3 + 99\pi_4 = \\ &= 1 \cdot \frac{5}{9} + 10 \cdot \frac{1}{9} + 30 \cdot \frac{1}{9} + 50 \cdot \frac{1}{9} + 99 \cdot \frac{1}{9} = \frac{194}{9} \approx 21.6 \end{aligned}$$

2.3 John megfigyelései szerint reggelente, amikor Londonban munkába autózik, háromféle lehet az időjárás: *esik*, *zuhog* vagy *szakad*. Tapasztalata szerint egy nap időjárásából következtetni lehet a következő nap időjárására, az alábbi valószínűségi értelemben:

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik} | \text{ma esik}) = 1/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad} | \text{ma esik}) = 6/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap esik} | \text{ma szakad}) = 2/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad} | \text{ma szakad}) = 4/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap szakad} | \text{ma zuhog}) = 5/10,$$

$$\mathbb{P}(\text{holnap zuhog} | \text{ma zuhog}) = 4/10.$$

Jelöljük az időjárás állapotait számokkal: $0 := \text{„esik”}$, $1 := \text{„zuhog”}$, $2 := \text{„szakad”}$. Modellezzük John reggeli megfigyeléseinek sorozatát időben homogén Markov láncsal!

- Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot. (Vigyázat: a fenti átmenet-valószínűségek összevissza vannak megadva.)
- Feltéve, hogy elsőjén esik, mi a valószínűsége a „00012” megfigyelés-sorozatnak (*elsejével* kezdve)?
- Feltéve, hogy elsőjén esik, mi a valószínűsége, hogy harmadikán zuhog?
- Feltéve, hogy elsőjén esik, mi a közelítő valószínűsége, hogy huszonkilencedikén zuhog?
- Hosszú távon a reggelek hány százalékán zuhog?
- Ha esik, John 20 percet autózik dugóban, ám ha zuhog, akkor 30-at, ha szakad, akkor pedig 70-et. Napi átlagban hány percet tölt reggeli dugóban autózással hosszú távon?

Megoldás:

- A $0, 1, 2$ állapotokat rendre a mátrix 1., 2. ill, 3. sorához és oszlopához rendelve

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{P}(00012 | X_0 = 0) = P_{00}P_{00}P_{01}P_{12} = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.0015$

c.)

$$(P^2)_{01} = (0.1 \ 0.3 \ 0.6) \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix} = 0.03 + 0.12 + 0.24 = 0.39$$

d.) A 28 nap elteltével kialakuló valószínűségeket közelítsük a Markov lánc stacionárius eloszlásával! Ehhez a $\pi P = \pi$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol a π háromelemű sorvektor tartalmazza a stacionárius eloszlást. Átrendezés után $(P^T - \mathbb{I})\pi^T = \underline{0}$, ahol \mathbb{I} a 3×3 -as egységmátrixot, $\underline{0}$ pedig a három nullából álló oszlopvektort jelöli. A lineáris egyenletrendszerek szokásos mátrix-jelölésével

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0.9 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & -0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.6 & 0.5 & -0.6 & 0 \end{array} \right).$$

Ezt persze eliminációval oldjuk meg. Egy sor kiesik, ahogy kell, és a végén (pl.) az marad, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{16}{51} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{42}{51} & 0 \end{array} \right),$$

vagyis az egyenletrendszer egyik megoldása a $(16 \ 42 \ 51)^T$ vektor. A stacionárius eloszlás ennek valószínűségi vektorra normált változata (ahol az elemek összege 1), vagyis

$$\pi = \left(\frac{16}{109} \quad \frac{42}{109} \quad \frac{51}{109} \right).$$

Végül a feladat kérdésére a válasz:

$$\mathbb{P}(X_{29} = 1 | X_1 = 0) \approx \pi_1 = \frac{42}{109} \approx 0.38532$$

e.) A Markov láncunk véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, ezért az ergodtétel szerint hosszú távon az 1-es állapot bekövetkezési gyakorisága majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti valószínűséghez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{k : 1 \leq i \leq n \text{ és } X_k = 1\} = \pi_1 = \frac{42}{109} \approx 0.38532$$

f.) Jelölje $S = \{0; 1; 2\}$ az állapotteret és legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a dugóban töltött percek száma az állapot függvényében:

$$f(i) = \begin{cases} 20, & \text{ha } i = 0 \\ 30, & \text{ha } i = 1 \\ 70, & \text{ha } i = 2 \end{cases},$$

ami helyett elég egy oszlopvektort leírni:

$$f = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint f időátlaga majdnem biztosan tart a stacionárius eloszlás szerinti sokaságátlaghoz. Sokféle különböző jelöléssel leírva ugyanazt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) &= \int_S f \, d\pi = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2) \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 70 \end{pmatrix} \\ &= 20\pi_0 + 30\pi_1 + 70\pi_2 = \frac{5150}{109} \approx 47.248 \end{aligned}$$

2.4 Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

- Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.
- Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?
- Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?
- A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

Megoldás:

- Az állapottér legyen $S = 1, 2, 3, 4$, és számozzuk a sarkokat az északnyugati saroktól kezdve, órajárással ellentétes irányban. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

-

$$(P^2)_{11} = (1/4 \quad 1/2 \quad 0 \quad 1/4) \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

amit persze úgy is el lehet mondani, hogy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ valószínűséggel marad végig ahol volt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ valószínűséggel elmegy órajárási irányba aztán visszajön, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig fordítva.

- Egy óra hosszú idő, közelítsünk a stacionárius eloszlással, vagyis oldjuk meg a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszerrel. **A transzponálás nagyon fontos.** Az egyenletrendszer mátrixos alakban, az áttekinthetőség kedvéért néggyel végigszorozva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Innentől

- i.) Szabad megsejteni, hogy szimmetria-okból a stacionárius eloszlás az egyenletes, aztán leellenőrizni, hogy a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$ tényleg kielégíti az egyenletrendszert, *vagy*
- ii.) szabad észrevenni, hogy az eredeti P mátrixnak nem csak a sorösszegei nullák, hanem az oszlopösszegei is, majd hivatkozni az előadásra, miszerint ilyenkor a stacionárius eloszlás egyenletes (ehhez igazából fel se kell írni az egyenletrendszert), *vagy*
- iii.) szabad megoldani az egyenletrendszert.

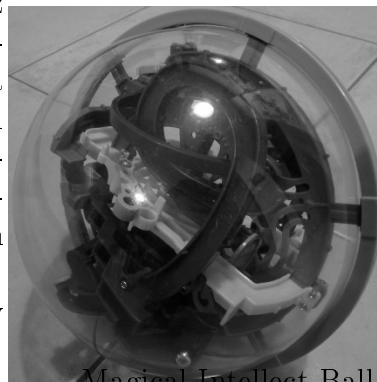
Mindenképpen arra jutunk, hogy $\pi = (\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4})$. A feladat kérdésére a válasz $\pi_3 = \frac{1}{4}$.

- d.) Legyen $f : S \rightarrow \{0; 1\}$ a napon levés indikátorfüggvénye, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 4, \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon $\sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_1 + \pi_4 = \frac{1}{2}$.

2.5 Móricka egy golyós ügyességi játékot játszik, ahol egy csapágygolyót kell végigvezetni egy akadálypályán. Az első pályát gyakorolja, ahol 3 nehéz akadályon kell átjutni. Móricka az első akadályon $\frac{1}{4}$, a másodikon $\frac{1}{3}$, a harmadikon $\frac{1}{2}$ valószínűséggel *bukik el*, az előzményektől függetlenül. Ilyenkor a golyó „leesik”, és Móricka kezdheti az egészet előlről. Ellenkező esetben továbbjut a következő akadályhoz. Ha véletlenül mindhárom akadályon sikerül túljutnia, akkor szintén újratekdi a legelejéről. Jelölje X_n azt, hogy n lépés után Móricka éppen hány akadályon van túl – így X_n lehetséges értékei 0, 1, 2, 3.



Magical Intellect Ball

- a.) Írjuk fel az X_n Markov lánc átmenetmátrixát.
- b.) Hosszú távon melyik állapotban lesz a Markov lánc legtöbbször, és a lépések mekkora hányadát tölti Móricka ezzel a leggyakoribb akadállyal?
- c.) Hosszú távon hanyadik akadályon *bukik el* legtöbbször Móricka, és a bukások mekkora hányada történik ezen az akadályon?

Megoldás:

- a.) Az $S = \{0, 1, 2, 3\}$ állapotterrel

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- b.) Keressük a π stacionárius eloszlást, amihez megoldjuk a $(P - I)^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

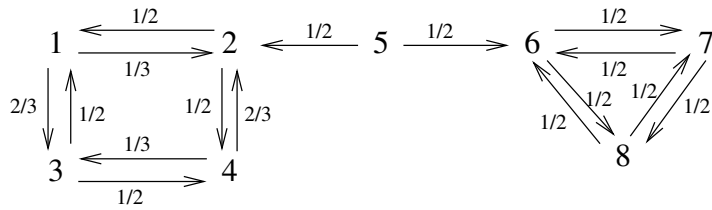
Ennek megoldása az $\sum_{i \in S} \pi_i$ normálási feltételt is figyelembe véve

$$\pi = \left(\frac{4}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{1}{10} \right),$$

vagyis a Markov lánc a 0 állapotban van legtöbbször (hát persze), és pedig az ergodtétel értelmében hosszú távon a lépések $\frac{4}{10}$ -ében. (A lánc irreducibilis és aperiodikus, az ergodtételt az egyes állapotok indikátorfüggvényeire alkalmazhatjuk.)

- c.) A lépések $\frac{4}{10}$ -ében próbálkozik Mórnicka az 1-es akadállyal, ezen belül mindig $\frac{1}{4}$ valószínűséggel bukik el, vagyis a lépések $\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$ -ében éppen az 1-es akadályt bukja. Hasonlóan a 2-es és 3-as akadályt is a lépések $\frac{1}{10}$ -ében bukja, vagyis **hosszú távon mindhárom akadályon ugyanannyiszor, az összes bukás $\frac{1}{3}$ -ában bukik.**

2.6 Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 | X_0 = 6) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 | X_0 = 1) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 | X_0 = 6) \approx ?$
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 | X_0 = 5) \approx ?$

Megoldás: A Markov lánc NEM irreducibilis. Három osztálya közül kettő zárt: a $C_1 := \{1, 2, 3, 4\}$ osztály periódusa 2, a $C_2 := \{6, 7, 8\}$ osztály pedig aperiodikus, mert pl. 6-ból 6-ba vissza lehet jutni 2 és 3 lépésben is. Így

- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 | X_0 = 6) \approx \frac{1}{3}$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban. A Markov lánc ide megszorítva irreducibilis és aperiodikus, így a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az eloszlás a stacionáriussal közelíthető. A C_2 irreducibilis komponensen a(z egyetlen) π stacionárius eloszlás szimmetria okból az egyenletes, így $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 | X_0 = 6) \approx \pi_7 = \frac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 | X_0 = 1) = 0$, mert 1-ből indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, ez viszont periodikus 2 periódussal, így páros sok lépésben csak 1-be és 3-ba juthatunk el.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 | X_0 = 6) = 0$, mert 6-ból indulva örökre bent maradunk a C_2 osztályban, vagyis 2-be nem lehet eljutni.
- $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 | X_0 = 5) \approx \frac{1}{6}$, mert 5-ből indulva $\frac{1}{2}$ valószínűséggel az első lépésben a C_1 osztályba lépünk és ott is ragadunk, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel viszont a C_2 -be, és innen kezdve az a.) pont szerinti $\frac{1}{3}$ az esélyünk hosszú idő alatt 7-be érkezni.

2.7 Juliska a körmét minden nap más színűre festi. Vörös, narancs és barna között váltogat. Narancs után mindig barna következik, barna után viszont érmedobással dönt arról, hogy vörös vagy narancs következzen-e. Vörös után kockát dob: ha az eredmény 6-os, akkor barna következik, egyébként narancs.

- a.) Írjuk fel Juliska körme színének, mint Markov láncnak az átmenetmátrixát!
 b.) Ha Juliska körme május 1-én vörös, mennyi a valószínűsége, hogy május 5-én is vörös?
 c.) A napok hányad részében lesz vörös, narancs illetve barna Juliska körme hosszú távon?

Megoldás:

- a.) Jelöljük az állapotokat számokkal, mondjuk 1: vörös; 2: narancs; 3: barna. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- b.) Jelöljük a Markov láncot X_n -nel. Ha mondjuk május 1-e a nulladik nap, akkor május 5-e a negyedik, vagyis a kérdés $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = ?$ Ez a P^4 mátrix $(1, 1)$ eleme: $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P_{11}^4$. Ezt kiszámolhatjuk mondjuk úgy, hogy $P^4 = (P^2)^2$, Ebből persze nem kell minden elemet kiszámolni - ami nem kell, *-gal jelölöm:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{2} & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \quad P^4 = \begin{pmatrix} \frac{7}{144} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Ebből $\mathbb{P}(X_4 = 1|X_0 = 1) = P_{11}^4 = \frac{7}{144} \approx 0.048611$.

- c.) Az ergodtételt fogjuk használni, ehhez szükség van a Markov lánc stacionárius eloszlására. (Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy stacionárius eloszlása van.) Meg kell oldanunk a $(P^T - I)\pi^T$ homogén lineáris egyenletrendszerét. A szokásos mátrix-jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{5}{6} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Ennek egy lehetséges megoldása pl. $\tilde{\pi} = (6 \ 11 \ 12)$, egyetlen normált megoldása pedig

$$\pi = \left(\frac{6}{29} \quad \frac{11}{29} \quad \frac{12}{29} \right) \approx (0.20690 \quad 0.37931 \quad 0.41379).$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtételt az egyes állapotok indikátoraira alkalmazva azt kapjuk, hogy az i állapotban hosszú távon az idő π_i hányadát tölti. Vagyis Juliska körme az idő $\pi_1 \approx 20.7\%$ -ában vörös, $\pi_2 \approx 37.9\%$ -ában narancs és $\pi_3 \approx 41.4\%$ -ában barna.

- 2.8 Mari néni szeret beszélgetni, és befolyásolható. Minden este elmegy egy szomszédjához beszélgetni, és átveszi annak pártállását. Hat szomszédja van, ebből 2 fűpárti, 1 fapárti, 3 pedig virágpárti. Mari néni minden este vaktában választ beszélgetőpartnert azon 5 közül, akinél előző este *nem járt*. Jelöljük Mari néni lehetséges pártállásait $\{1, 2, 3\}$ -mal, ahol „1” jelentése „fűpárti”, „2” jelentése „fapárti”, „3” jelentése „virágpárti”. X_n pedig jelölje Mari néni pártállását n nap elteltével.

Modellezzük Mari néni állapotait időben homogén Markov láccal.

- a.) Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát.

- b.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége az 123123 állapot-sorozatnak (a nulladik napot is beleértve)?
- c.) Ha tudjuk, hogy a 0-dik napon Mari néni fűpárti volt, mi a valószínűsége, hogy a 2-dik napon is az?
- d.) Hosszú idő elteltével közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz Mari néni éppen fapárti?
- e.) Mari néni minden nap elmegy a gazdaboltba, és ha éppen fűpárti, akkor fűnyíródamilt vesz 500 Ft-ért, ha éppen fapárti, akkor permetszert 3000 Ft-ért, ha pedig virágpárti, akkor tápoldatot 1000 Ft-ért. Napi átlagban mennyit költ a gazdaboltban hosszú távon?

Megoldás:

- a.) Egy példa: ha ma éppen fűpárti, akkor a lehetséges 5 beszélgetőpartnere közül 1 fűpárti, 1 fapárti és 3 virágpárti. Ezért $P_{11} = \frac{1}{5}$, $P_{12} = \frac{1}{5}$, $P_{13} = \frac{3}{5}$. Hasonlóan végiggondolva

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 3/5 \\ 2/5 & 0/5 & 3/5 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

- b.) $\mathbb{P}((X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (2, 3, 1, 2, 3) | X_0 = 1) = P_{12}P_{23}P_{31}P_{12}P_{23} = \frac{1}{5} \frac{3}{5} \frac{2}{5} \frac{1}{5} \frac{3}{5} = \frac{18}{3125} = 0.00576$.
- c.) $\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_0 = 1) = (P^2)_{11} = \frac{9}{25} = 0.36$.
- d.) Megkeressük a stacionárius eloszlást, vagyis megoldjuk a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenlet-rendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -5/5 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 3/5 & -3/5 & 0 \end{array} \right)$$

Ennek megoldása (pontosabban: végtelen sok megoldása közül az az egy, ami eleget tesz a $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ normálási feltételnek is): $\pi = (\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3) = (2/6 \ 1/6 \ 3/6)$. Ez nem meglepő módon éppen a megfelelő pártállású szomszédok aránya.

Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus, a Markov láncok alaptétele szerint $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i$, vagyis ha n nagy, akkor $\mathbb{P}(X_n = 2) \approx \pi_2 = \frac{1}{6}$.

- e.) Mari néni költségfüggvénye

$$f = \begin{pmatrix} 500 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

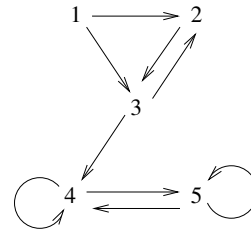
Az ergodtétel szerint ennek időátlaga 1 valószínűséggel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \left(\frac{2}{6} \ \frac{1}{6} \ \frac{3}{6} \right) \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 3000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \frac{7000}{6} \approx 1167,$$

vagyis Mari néni hosszú távon napi átlagban 1167 Ft-ot hagy a gazdaboltban.

2.9 Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



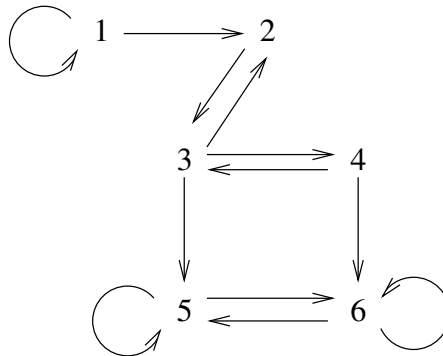
Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
{1}	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞ , vagy nincs
{2; 3}	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
{4; 5}	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Érdeemes megjegyezni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunikál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \rightsquigarrow j$ reláció („ i kommunikál j -vel”) egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapotter minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞ , vagy nem definiált.

2.10 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

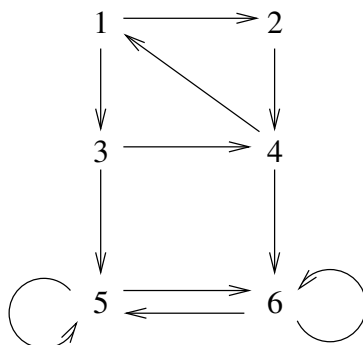


1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

Megoldás:

- Az $\{1\}$ osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert 1 lépésben vissza lehet térni.
- A $\{2,3,4\}$ osztály nyílt, mert el lehet hagyni, tehát lényegtelen és átmeneti. Periódusa 2, mert visszatérni csak páros sok lépésben lehet.

- Az $\{5,6\}$ osztály zárt, mert el nem lehet elhagyni, tehát (véges méretű osztályról lévén szó) lényeges és visszatérő. Periódusa 1 (vagyis aperiodikus), mert akárhány lépésben vissza lehet térni.



2. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

2.11 A 2. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egy lépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás:

- $\{1, 2, 3, 4\}$ nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 3.
- $\{5, 6\}$ zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1 (vagyis aperiodikus).

2.12 Egy jegypénztárhoz pontosan percenként érkeznek a vevők: minden perc végén pontosan 1. Ez alatt az egy perc alatt a pénztáros véletlen számú vevőt szolgál ki: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 2-t, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et sem, az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól:

- Ha a perc elején csak 1 vevő áll a sorban, mert akkor öt $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül kiszolgálni, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nem.
- Ha a perc végén már 4 vevő áll sorban, akkor az újonnan érkező nem áll be a sorba, hanem elkullog.

Jelölje X_n a sorban állók számát az n -edik perc végén (pontosabban: az $n + 1$ -edik perc elején, közvetlen azután, hogy az új vevő megérkezett). Tegyük fel, hogy az első perc elején a sorban pontosan 1 ember áll, vagyis $X_0 = 1$.

- Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét. *(Vigyázat, érdemes észnél lenni: mik is a lehetséges, elérhető állapotok?)*
- Adjuk meg a Markov lánc gráf-reprezentációját!
- Adjuk meg a Markov lánc átmenetmátrixát!

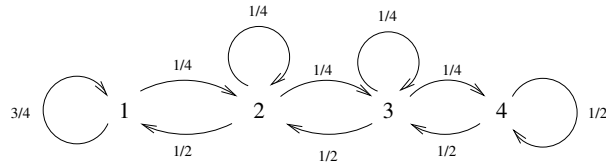
- d.) Adjuk meg a Markov lánc kezdeti eloszlását, vagyis a $\pi(0)$ kezdeti eloszlás vektort!
- e.) Mi a valószínűsége, hogy az $X_0X_1X_2 \dots$ sorozat (a trajektória) eleje 1211223?
- f.) Mennyi a $\mathbb{P}(X_3 = 2)$ valószínűség?
- g.) Számoljuk ki X_2 eloszlását, vagyis a Markov lánc 2 időegység utáni $\pi(2)$ eloszlásvektorát !
- h.) Mennyi $n = 29$ -re a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűség? *Csak képletet kérek! **Bónusz:** Számoljuk ki a $\mathbb{P}(X_n = 3)$ valószínűséget $n = 10, 20, 30$ -ra valamilyen számológépes programmal, ami gyorsan tud mátrixokat szorozni.*

Megoldás:

- a.) Mivel a vevőket mindig közvetlenül azután számoljuk, hogy a soron következő megérkezett, X_n mindig legalább 1 lesz. Másfelől, ha már a 4-et elérte, akkor tovább nem nőhet, vagyis 5-nél mindig kisebb marad. Így az állapottér

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

- b.) Mivel mindig 1 vevő érkezik, a Markov lánc mindig eggyel kevesebbet ugrik lefelé, mint ahány vevőt sikerült kiszolgálni. Vagyis $\frac{1}{2}$ valószínűséggel 1-et ugrik lefelé, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nem ugrik sehová, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 1-et felfelé. Kivétel ez alól a két végső helyzet: 1-ből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel ugrik 1-et felfelé és $\frac{3}{4}$ valószínűséggel marad; 4-ből $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugrik 1-et lefelé és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel marad. Így a gráf-reprezentáció



- c.)

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- d.) A feladat szövege szerint $X_0 = 1$, vagyis $\pi_1(0) = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, a többi i -re $\pi_i(0) = 0$. Vagyis a kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$. Ez *sorvektor*.
- e.) $\mathbb{P}((X_0X_1 \dots X_6) = (1211223)) = \pi_1(0)P_{12}P_{21}P_{11}P_{12}P_{22}P_{23} = 1 \cdot \frac{1}{4} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{1}{4} \frac{1}{4} = \frac{3}{2048}$.
- f.) Mivel $X_0 = 1$, $\mathbb{P}(X_3 = 2) = \mathbb{P}(X_3 = 2 | X_0 = 1)$. Ezt kétféleképpen is ki lehet számolni:
- 1-ből 2-be 3 lépésben el lehet jutni az 1112, 1122, 1212, 1222, 1232 útvonalakon. Ezek valószínűségeit az előző pont mintájára kiszámoljuk és összeadjuk. Nem csinálom meg.
 - $\mathbb{P}(X_3 = 2 | X_0 = 1) = P_{12}^3$, vagyis a P^3 3-lépéses átmenetmátrix első sorának második

elem. A mátrix-szorzást elvégezve

$$\begin{aligned}
 P^3 &= \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{11}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{4} & * & * \\ * & \frac{1}{2} & * & * \\ * & 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \frac{17}{64} & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

ahol a *-gal jelölt elemek számunkra nem érdekesek, így ki se számoltam őket. Lényeg, hogy $P_{12}^3 = \frac{17}{64} = 0.265625$

g.)

$$\begin{aligned}
 \pi(2) &= \pi(0)P^2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \\
 &= \left(\frac{3}{4} \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{11}{16} \ \frac{4}{16} \ \frac{1}{16} \ 0 \right).
 \end{aligned}$$

h.) $\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29)$, vagyis a $\pi(29)$ vektor harmadik eleme. Ezt elegánsan úgy lehet leírni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = \pi_3(29) = \pi(29) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\pi(29) = \pi(0)P^{29} = (1 \ 0 \ 0 \ 0) P^{29}$,

$$\mathbb{P}(X_{29} = 3) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) P^{29} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bónusz:

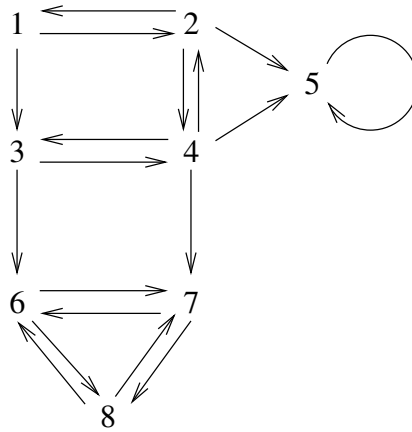
$$a_n := \mathbb{P}(X_n = 3) = (1 \ 0 \ 0 \ 0) P^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

„GNU Octave”-val számolva:

n	10	20	30
a_n	0.12629	0.13294	0.13331

.

Megjegyzem, hogy $n \rightarrow \infty$ -re a határérték $\pi_3(\infty) = \frac{2}{15} \approx 0.1333333$.



3. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

2.13 A 3. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk meg, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.

Megoldás: Két állapot pontosan akkor van azonos osztályban, ha egyikből a másikba és másikból az egyikbe is el lehet jutni (esetleg több lépésben). Egy osztály akkor zárt, ha nem lehet belőle kijutni – egyébként nyílt. Mivel az állapottér véges, minden osztály is véges, ezért minden osztály pontosan akkor lényeges és pontosan akkor visszatérő, ha zárt, egyébként pedig lényegtelen és átmeneti. (Végtelen állapotterek végtelen osztályaira ezek a fogalmak sokkal izgalmasabbak.)

Egy állapot periódusa az a legnagyobb szám, aminek minden lehetséges visszatérési idő többszöröse. Egy osztály periódusa az ő elemeinek közös periódusa.

Mindezek alapján

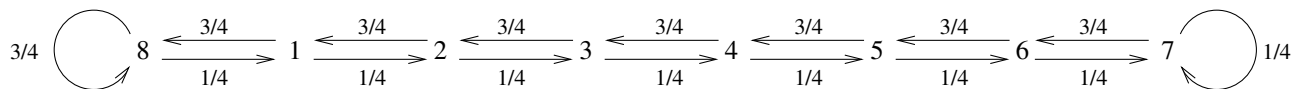
- Az $\{1,2,3,4\}$ osztály nyílt, lényegtelen, átmeneti, periódusa 2.
- Az $\{5\}$ osztály zárt, lényeges, visszatérő, periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus).
- A $\{6,7,8\}$ osztály zárt, lényeges, visszatérő. Periódusa 1 (vagyis ő aperiodikus), hiszen 2 és 3 lépésben is vissza lehet térni ugyanabba az állapotba.

2.14 Legyen X_n diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ állapottérben, ami egy sor hosszát modellezi. Az átmenetvalószínűségek legyenek olyanok, hogy ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet: a sor hossza $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 1-gyel csökken, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig 1-gyel nő. Kivétel ez alól, ha a sor üres, mert akkor a hossza csökkenés helyett $\frac{3}{4}$ valószínűséggel 0 marad, illetve ha a sor hossza 7, mert akkor növekedés helyett $\frac{1}{4}$ valószínűséggel 7 marad.

a.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását. Ehhez használjuk ki, hogy X_n születési-halálalozási folyamat.

- b.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 1000 lépés után ismét üres?
 c.) Mennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz?
 d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha a sorhosszra nincs felső korlát, vagyis az állapottér $\{0, 1, 2, \dots\}$?

Megoldás: A folyamat gráf-reprezentációja a 4 ábrán látható. Ez valóban születési-halálzási



4. ábra. Születési-halálzási folyamat gráf-reprezentációja

folyamat, mert ugrani 1 lépésben csak szomszédos állapotba lehet.

- a.) Születési-halálzási folyamatban a szomszédos állapotok stacionárius eloszlás szerinti súlya úgy aránylik egymáshoz, mint a közöttük való két átmenethez tartozó átmenetvalószínűségek hányadosa – egészen pontosan olyan sorrendben, hogy

$$\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}.$$

Ez alapján a példabeli folyamatra

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_4}{\pi_5} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_5}{\pi_6} = \frac{3}{1}, \frac{\pi_6}{\pi_7} = \frac{3}{1}.$$

Vagyis a stacionárius eloszlás konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = (3^7, 3^6, 3^5, 3^4, 3^3, 3^2, 3, 1)$$

vektornak. Ahhoz, hogy az elemek összege 1 legyen, a normálási konstanszt

$$c = \frac{1}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7} = \frac{1}{\frac{3^8-1}{3-1}} = \frac{1}{3280}$$

-nak kell választani, vagyis $\pi_k = \frac{3^{7-k}}{3280}$ ($k = 0, 1, \dots, 7$), avagy

$$\pi = \left(\frac{3^7}{3280}, \frac{3^6}{3280}, \frac{3^5}{3280}, \frac{3^4}{3280}, \frac{3^3}{3280}, \frac{3^2}{3280}, \frac{3}{3280}, \frac{1}{3280} \right).$$

Vegyük észre, hogy ehhez örvendetes módon fel se kellett írni a 8×8 -as átmenetmátrixot.

- b.) A Markov lánc irreducibilis, mert minden állapotból minden állapotba el lehet jutni. A 0 állapot nyilvánvalóan aperiodikus, mert 1 lépésben vissza lehet térni. Így az összes többi állapot – és az egész Markov lánc – is aperiodikus. Irreducibilis, aperiodikus és véges állapotterű Markov láncban a Markov láncok alaptétele szerint az eloszlás hosszú idő után közel van az egyetlen stacionárius eloszláshoz. 1000 lépés hosszú idő, így a kiinduló állapottól függetlenül $\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{3^7}{3280} = \frac{2187}{3280} \approx 0.66677$.

c.) Vezessük be az állapottéren az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(k) := k$ definícióval. Ez az f a sorhosszt méri, és oszlopvektorként tekintünk rá:

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga 1 valószínűséggel tart f -nek π szerinti várható értékéhez (súlyozott átlagához), vagyis

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k \in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \dots + \pi_7 \cdot 7 = \\ &= \sum_{k=0}^7 \frac{3^{7-k}}{3280} \cdot k = \frac{1636}{3280} \approx 0.4988. \end{aligned}$$

d.) **Bónusz:** A születési-halálozási folyamatra végtelen állapotter esetén is igaz, hogy $\frac{\pi_k}{\pi_{k+1}} = \frac{P_{k+1,k}}{P_{k,k+1}}$, vagyis esetünkben

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \dots = \frac{3}{1}, \quad (1)$$

már ha létezik stacionárius eloszlás. Az pedig pontosan akkor létezik, ha az (1) alapján definiált $\tilde{\pi}$ normálható. Más szóval, a stacionárius eloszlás most is konstansszorosa a

$$\tilde{\pi} = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots \right)$$

vektornak, már ha van olyan konstans, amivel ezt megszorozva az elemek összege 1 lesz – vagyis ha az elemek összege véges. Esetünkben szerencsére

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty,$$

így

$$\pi = \frac{1}{\frac{3}{2}} \tilde{\pi} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^4}, \dots \right)$$

lesz az egyetlen stacionárius eloszlás. Más szóval

$$\pi_k = \frac{2}{3^{k+1}} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

A Markov láncok alaptételében állított eloszlás-konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és aperiodikus és HA van stacionárius eloszlása. Esetünkben ezek teljesülnek, így

$$\mathbb{P}(X_{1000} = 0) \approx \pi_0 = \frac{2}{3}.$$

Hasonlóan, az ergodtételben állított konvergencia továbbra is érvényes, HA a végtelen állapotterű születési-halálozási folyamat irreducibilis és HA van stacionárius elszlása és HA az f -nek létezik a π szerinti várható értéke. Esetünkben ezek teljesülnek, így az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(k) := k$ függvényre

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \sum_{k \in S} \pi_k f(k) = \pi f = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \cdot 1 + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az utolsó végtelen sort sokféleképpen ki lehet számolni, pl. úgy is, hogy észrevevessük, hogy a π eloszlás szerint a sorhossz pesszimista geometriai eloszlású $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, aminek a várható értéke $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k k = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{2}$.

Látható, hogy a végtelen állapottéren számolt határértékeket elég jól közelítik a véges (mindössze 8 elemű) állapottéren számoltak. Ennek az az oka, hogy a stacionárius eloszlás a mi modellünkben gyorsan lecseng, és a $k > 7$ állapotoknak együttesen is kicsi (egész pontosan $\frac{1}{3^8} \approx 0.00015$) a súlya.

- 2.15 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgáltatnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgáltatni.

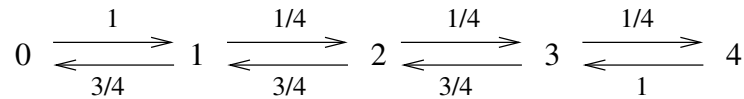
Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n -edik csettintés után (vagyis az n -edik sorhossz-változás után).

- Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?
- Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?
- Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!
- Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!
- Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!
- Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? (*Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.*)
- Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

Megoldás: Kezdjük a c.) és d.) kérdéssel, utána jön az a.) és b.).

- Az állapotter $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a gráf-reprezentáció



d.) Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a.) A 0 állapotból a 0-ba 4 lépésben visszatérni csak kétféleképpen lehet: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ vagy $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$. Ezek (feltételes) valószínűsége (feltéve, hogy 0-ból indulunk $P_{01} \cdot P_{10} \cdot P_{01} \cdot P_{10} = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ illetve $P_{01} \cdot P_{12} \cdot P_{21} \cdot P_{10} = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$, így

$$\mathbb{P}(X_4 = 0 | X_0 = 0) = \frac{9}{16} + \frac{9}{64} = \frac{45}{64} \approx 0.703.$$

b.) A 0 állapotból a 0-ba 5 lépésben visszatérni sehoggy sem lehet, azért

$$\mathbb{P}(X_5 = 0 | X_0 = 0) = 0.$$

e.) **1. megoldás, ész nélkül:** A $(P^T - I)\pi^T$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol I az egységmátrix, $\pi = (\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4)$ a keresett stacionárius eloszlás (sorvektor):

$$\begin{pmatrix} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az egyenletrendszer a szokásos bővített mátrix jelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Eliminációval nagyon könnyen kijön, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 \end{array} \right).$$

Az utolsó egyenlet kiesett, ahogy kell. Az jött ki, hogy

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \\
 \pi_1 &= 3\pi_2 \\
 \pi_2 &= 3\pi_3 \\
 \pi_3 &= 4\pi_4.
 \end{aligned} \tag{2}$$

$\tilde{\pi}_4 := 1$ választással kijön egy megoldás: $\tilde{\pi} = (27 \ 36 \ 12 \ 4 \ 1)$. Az összes többi megoldás ennek konstans-szorosa, tehát az egyetlen stacionárius eloszlás ennek lenormáltja (hogy a sorösszeg 1 legyen):

$$\pi = \left(\frac{27}{80} \quad \frac{36}{80} \quad \frac{12}{80} \quad \frac{4}{80} \quad \frac{1}{80} \right).$$

Azt, hogy pontosan egy stacionárius eloszlás van, persze előre tudtuk abból, hogy a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis.

2. megoldás, kevesebb munkával: Mivel X_n születési-halálozási folyamat, minden $i = 0, 1, 2, 3$ -ra igaz, hogy $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$. Ez éppen a (2) egyenletrendszer. Innen az előző megoldás érvényes.

- f.) A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis. Ha aperiodikus is lenne, akkor a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_{100} = 0) \approx \pi_0 = \frac{27}{80} = 0.3375$ lenne, a kezdeti állapottól függetlenül. Igen ám, de ez a Markov lánc *periodikus*, éspedig a periódusa 2. Mivel a feltevés szerint $X_0 = 0$, $n = 100$ lépésben pont lehetséges eljutni a 0-ba – a keresett való.ség nem nulla.

Intuitív érvelés 1: 0-ból indulva a 0-ban csak minden páros lépésben járhatunk. Mégis, az ergodtétel szerint hosszú távon az időnek $\pi_0 = 33.75\%$ -át töltjük ott. Ezért a páros időpontok $2 \cdot 33.75\% = 67.5\%$ -át töltjük 0-ban, ezért

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx 2\pi_0 = 0.675 = 67.5\%.$$

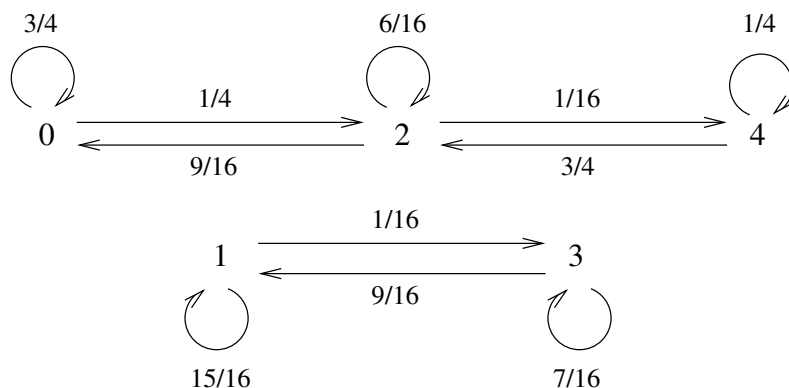
Intuitív érvelés 2: 0-ból indulva a $n = 100$ ugrás után csak a páros állapotokban lehetünk. Ezekben belül viszont – mivel $n = 100$ sok idő – jó közelítéssel a stacionárius eloszlás adja meg a tartózkodási valószínűségeket: persze **abban az értelemben**, hogy páros i -re az i -ben való tartózkodás valószínűsége π_i -vel arányos. Vagyis mivel a páros i -khez tartozó π_i -k összege nem 1, újra kell őket normálni 1-re. Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx \frac{\pi_0}{\pi_0 + \pi_2 + \pi_4} = \frac{\frac{27}{80}}{\frac{27}{80} + \frac{12}{80} + \frac{1}{80}} = \frac{27}{40} = 0.675 = 67.5\%.$$

Precíz érvelés: A kétlépéses átmenetmátrix

$$P^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 15/16 & 0 & 1/16 & 0 \\ 9/16 & 0 & 6/16 & 0 & 1/16 \\ 0 & 9/16 & 0 & 7/16 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Nézzünk a Markov láncra csak minden páros időpontban. Így az $Y_k := X_{2k}$ Markov lánc átmenetmátrixa a fenti P^2 , gráf-reprezentációja



Látható, hogy az Y_k Markov lánc *reducibilis*, kommunikáló osztályai a $\{0, 2, 4\}$ és az $\{1, 3\}$, mindkettő zárt. Ezért az $\tilde{S} := \{0, 2, 4\}$ rész-állapotterület önálló életet él, és az Y_k Markov láncot nézhetjük csak ezen. Így az állapotterület már irreducibilis, az átmenetmátrix pedig a fenti P^2 páros indexű elemeiből áll:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 9/16 & 6/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Vagyis kaptunk egy véges állapotterületű, irreducibilis és immár *aperiodikus* Markov láncot. Ennek a szokásos módon kiszámolhatjuk a stacionárius eloszlását, és az jön ki, hogy

$$\bar{\pi} = (\bar{\pi}_0 \quad \bar{\pi}_2 \quad \bar{\pi}_4) = \left(\frac{27}{40} \quad \frac{12}{40} \quad \frac{1}{40} \right).$$

Így a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) = \mathbb{P}(Y_{50} = 0 | Y_0 = 0) \approx \bar{\pi}_0 = \frac{27}{40} = 0.675.$$

g.) Ha a sorhosszra nincs korlát, a (2) egyenletrendszer megfelelőjére azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_1 \\ \pi_1 &= 3\pi_2 \\ \pi_2 &= 3\pi_3 \\ \pi_3 &= 3\pi_4 \\ \pi_4 &= 3\pi_5 \\ &\vdots \\ \pi_i &= 3\pi_{i+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ebből $\pi_0 := c$ választással kapható egy megoldás:

$$\tilde{\pi} = \left(c \quad \frac{4}{3}c \quad \frac{4}{9}c \quad \frac{4}{27}c \quad \frac{4}{81}c \quad \dots \quad \frac{4}{3^i}c \quad \dots \right)$$

ezek összege $c(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{3^i}) = c(1 + \frac{4/3}{1-1/3}) = 3c$, vagyis pontosan akkor 1, ha $c = \frac{1}{3}$. Vagyis $c := \frac{1}{3}$ választással kapunk egy stacionárius eloszlást:

$$\pi = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{4}{27} \quad \frac{4}{81} \quad \dots \quad \frac{4}{3^{i+1}} \quad \dots \right).$$

Avagy:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{ha } i = 0 \\ \frac{4}{3^{i+1}}, & \text{ha } i \geq 1 \end{cases}.$$

Ellenőrizhető, hogy ez tényleg stacionárius eloszlás.

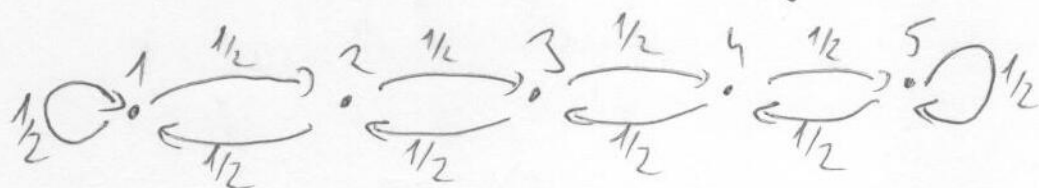
Irreducibilis Markov láncra, ha a stacionárius eloszlás létezik (vagyis a lánc pozitív rekurrens), akkor végtelen állapotterületű esetben is érvényes a Markov láncok konvergenciatétele, mint a véges állapotterület esetén (csak a konvergencia lassabb). Így az f.) pont-beli érvelésből az jön ki, hogy

$$\mathbb{P}(X_{100} = 0 | X_0 = 0) \approx 2\pi_0 = \frac{2}{3}.$$

2.16 Egy hallgató egy maratoni szóbeli vizsgán 2-esről indul. Az oktató sorban teszik fel neki a kérdéseket. Ha helyesen válaszol, a jegye 1-gyel javul (hacsak nem 5-ösre áll, mert akkor nem változik). Ha hibásan válaszol, akkor a jegye 1-gyel romlik (hacsak nem 1-esre áll, mert akkor nem változik). A hallgató minden kérdésre az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszol helyesen. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 100 kérdés után ötösre áll?

Megoldás:

Legyen X_n a hallgató jegye (mármint, hogy hanyasra áll) n kérdés után. X_n Markov lánc, gráf-reprezentációja



A kérdés a $P(X_{100}=5 | X_0=2)$ valószínűség.

A Markov lánc irreducibilis és aperiodikus (mert az végpontokban van helyben ugrás) és véges állapottérű

\Rightarrow stabil, $n=100$ hosszú idő

$\Rightarrow P(X_{100}=5 | X_0=2) \approx \pi_5$ ahol π az egyetlen stac. eloszlás.

Mivel X_n születési-halálási folyamat, a stac. eloszlás könnyen leolvasható:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5, \text{ normális utól}$$

$$\pi = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \right) \text{ egyenletes}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(X_{100}=5 | X_0=2) \approx \pi_5 = \frac{1}{5} = 20\%}$$

2.17 Jancsika a Tömegszolgálatás pótpótZH-ra gyakorol: ugyanannak az 5 kérdésből álló, a Moodle által automatikusan javított gyakorló feladatnak fut neki újra és újra. A Moodle minden válasz után azonnal jelzi, hogy a megoldás helyes-e. Ha hibás, akkor Jancsika újra próbálkozik ugyanazzal a kérdéssel, ha pedig helyes, akkor továbblép a következőre (illetve, ha az utolsónál járt, akkor előlről kezdi).

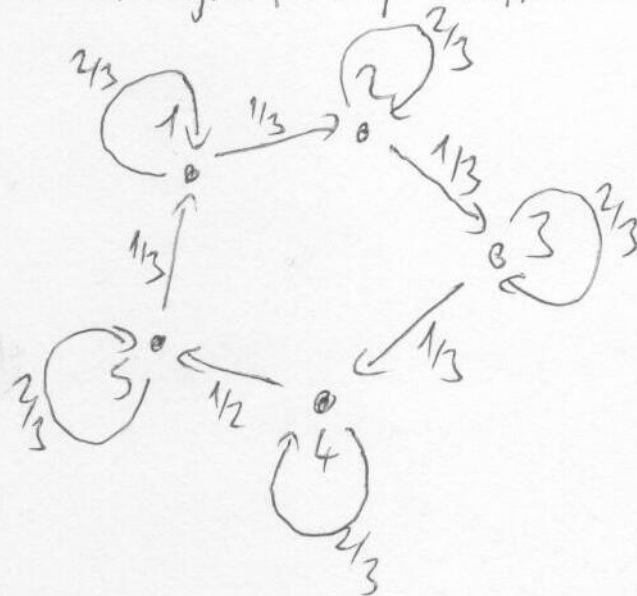
Jancsika nem fejlődik: minden alkalommal, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel válaszol helyesen a kérdésre.

A munkát az első kérdéssel kezdi. Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy 100 próbálkozás után ismét az első kérdésnél tart?

Megoldás:

Legyen X_n az, hogy hanyadik ^{kérdésből} ~~feladatból~~ jár n próbálkozás után.

X_n időben homogén Markov lánc az $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ állapotterren. A gráf-reprezentációja



X_n véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus

\Rightarrow stabil, a kérdéses $n=100$ hosszú idő

$\Rightarrow P(X_{100}=1 | X_0=1) \approx \pi_1$ ahol π az egyetlen
stacionárius eloszlás.

A gráf forgatási szimmetriájából látható, hogy
 $\pi = \left(\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5}\right)$ egyenletes eloszlás.

[Ez ellenőrizhető is: $\pi P = \pi$, ha P az átmenetmátrix]

$\Rightarrow \boxed{P(X_{100}=1 | X_0=1) \approx \pi_1 = 0.2 = 20\%}$

3. Generátorfüggvény-módszer

3.1 Az X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3, \quad \text{ahol } c \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mennyi c értéke?
- (b) Mennyi X várható értéke?
- (c) Mennyi X szórása?
- (d) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 2)$ valószínűség?

Megoldás:

(a) Minden generátorfüggvényre igaz, hogy $g(1) = 1$, ezért

$$g(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 1^2 + c \cdot 1^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + c = 1,$$

amiből $c = \frac{1}{8}$. Ebből

$$g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3$$

(b) Mint mindig, $\mathbb{E}X = g'(1)$. Ehhez

$$g'(z) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2z + \frac{1}{8} \cdot 3z^2,$$

amiből

$$\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 = \frac{11}{8} = 1.375.$$

(c) Mint mindig, $\mathbf{D}^2X = g''(1) + g'(1) - g'(1)^2$. Ehhez

$$g''(z) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}z,$$

amiből $g'(1) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$, amiből

$$\mathbf{D}^2X = \frac{3}{2} + \frac{11}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{96 + 88 - 121}{64} = \frac{63}{64}.$$

Ebből

$$\mathbf{D}X = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.99$$

(d) Mint mindig, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{g''(0)}{2!}$. Esetünkben $g''(0) = \frac{3}{4}$, amiből

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\frac{3}{4}}{2!} = \frac{3}{8}.$$

Alternatív megoldás: A generátorfüggvényből kiolvasható X eloszlása: $p_k := \mathbb{P}(X = k)$ jelöléssel

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{3}{8}z^2 + cz^3,$$

amiből $p_0 = \frac{1}{4}$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = c$, és a többi k -ra $p_k = 0$. Így persze

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ miatt $c = \frac{1}{8}$.

(b) $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$.

(c) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{8}$. Emiatt

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{23}{8} - \left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{63}{64},$$

amiből

$$\mathbf{D}X = \frac{\sqrt{63}}{8} \approx 0.99$$

(d) $\mathbb{P}(X = 2) = p_2 = \frac{3}{8}$.

3.2 Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2z}$.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mennyi X szórása?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

Megoldás: InfoMSC-MatD-HFmegoldások-2014tavasz

3.3 Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = z^5 e^{z-c}$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

a.) Mennyi a c konstans értéke?

b.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 100)$ valószínűség?

Megoldás:

a.) Minden generátorfüggvényre $g(1)=1$, vagyis
 $g(1) = 1^5 e^{1-c} = 1$, amiből $c=1 \rightarrow g(z) = z^5 e^{z-1}$

b.) $g'(z) = 5z^4 e^{z-1} + z^5 e^{z-1}$,
 amiből ~~$P(X=1) = g'(1) = 5+1=6$~~
 $P(X=0) = g'(0) = \underline{0}$.

c.) 1. megoldás: $g(z)$ sorfejtéssel: $g(z) = e^{-1} z^5 e^z$
 konstans \uparrow \uparrow \leftarrow jó ismerős
 z -hatvány

ebből $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^k}{k!} + \dots$

$\Rightarrow z^5 e^z = z^5 + z^6 + \frac{z^7}{2} + \frac{z^8}{3!} + \dots + \frac{z^{k+5}}{k!} + \dots$

$\Rightarrow g(z) = e^{-1} z^5 + e^{-1} z^6 + \frac{e^{-1}}{2} z^7 + \frac{e^{-1}}{3!} z^8 + \dots + \frac{e^{-1}}{95!} z^{100} + \dots$

amiből $P(X=100) = \frac{e^{-1}}{95!} \approx 36 \cdot 10^{-199}$, kicsi.

2. megoldás: Legyen $X=5+U$, ahol $U \sim \text{Poi}(1)$.

Ekkor U generátorfüggvénye e^{z-1} , ~~vagyis~~ amiből

X generátorfüggvénye éppen a mi $g(z)$ -nk.

Ebből $P(X=100) = P(U=95) = \underline{\underline{\frac{e^{-1}}{95!}}}$.

3.4 Egy szabályos dobókockával dobunk, majd ami szám kijött, annyszor dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az érmével dobott fejek számát.

a.) Számoljuk ki Y generátorfüggvényét. (Tipp: Y egy véletlen tagszámú összeg.)

b.) Mennyi Y várható értéke?

Megoldás:

a.) Jelölje N a kockával dobott számot, X_k pedig az k -edik érmedobás során a „fej” indikátorát, vagyis

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-edik dobás fej,} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}.$$

Így $Y = \sum_{k=1}^N X_k$ véletlen tagszámú összeg, és generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = g_N(g_X(z)),$$

ahol

$$g_N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k)z^k = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \dots + \frac{1}{6}z^6 = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6}{6}$$

az N generátorfüggvénye és

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)z^k = \frac{1}{2}z^0 + \frac{1}{2}z^1 = \frac{1+z}{2}$$

az X_k -k közös generátorfüggvénye. Összesítve:

$$g_Y(z) = \frac{\frac{1+z}{2} + \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^4 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^5 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^6}{6}.$$

b.) Mivel $Y = \sum_{k=1}^N X_k$ véletlen tagszámú összeg,

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}N\mathbb{E}X = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{7}{4}.$$

Ugyanez, persze, kiszámolható sokkal több munkával is mint $\mathbb{E}Y = g'_Y(1)$.

3.5 Móricka addig dobál egy szabályos dobókockát, amíg kétszer *egymás után* ki nem jön neki a 6-os. Határozzuk meg a szükséges dobások X számának generátorfüggvényét és várható értékét. (Segítség: Nézzünk X -re mint véletlen tagszámú összegre: legyen N az a véletlen szám, hogy hányszor kiált fel Móricka, hogy „Na, egy hatos már megvan!”. Így az X előáll mint N darab véletlen szám összege: az i -edik felkiáltáshoz Y_i darab dobás tartozik. Vigyázat: jól gondolkodjunk el Y_i eloszlásán. Figyelmeztetésül mondom, hogy minden $Y_i \geq 2$, mert dobni kell egy 6-ost, aztán még valamit, hogy eldőljön, vége-e a játéknak.)

1. megoldás, a segítség szerint:

Móricka egy „kísérlete” álljon azokból a dobásokból, amíg sikerül neki egy 6-ost dobni, és még az azt követő dobásból. Ha ez az utolsó dobás 6-os, akkor vége, ha pedig nem 6-os, akkor jön a következő kísérlet. Jelölje Y_i az i -edik kísérlet hosszát. Így

$$X = \sum_{i=1}^N Y_i,$$

Y_i pedig 1-gyel több, mint a hatos megdobásához szükséges dobások száma, vagyis $Y_i = Z_i + 1$, ahol Z_i geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel (hagyományos optimista geometriai eloszlás), és $\{Z_1, Z_2, \dots\}$ függetlenek egymástól és N -től is.

A Z_i -k generátorfüggvénye

$$g_Z(z) = \frac{\frac{1}{6}z}{1 - \frac{5}{6}z} = \frac{z}{6 - 5z},$$

az Y_i -k generátorfüggvénye ennek z -szerese:

$$g_Y(z) = \frac{z^2}{6 - 5z}.$$

Az N maga is geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így generátorfüggvénye

$$g_N(z) = g_Z(z) = \frac{z}{6 - 5z}.$$

A véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{\frac{z^2}{6-5z}}{6 - 5\frac{z^2}{6-5z}} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható értéket számolhatnánk ennek deriválásával, de azt is tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{p} + 1 \right) = 6 \cdot 7 = 42.$$

2. megoldás, tők másképp (jobb, általánosítható megoldás):

Legyen g az X generátorfüggvénye, g_1 pedig a hátralévő dobások számának (X_1 -nek) a generátorfüggvénye akkor, ha a legutóbbi dobás 6-os volt, de az azelőtti nem. Ezek között keresünk összefüggéseket a teljes várható érték tétellel.

g -re felírunk egy teljes várható érték tételt aszerint, hogy mi az első dobás eredménye. Ha 6-ost dobunk, akkor még X_1 dobás van hátra, ha pedig mást, akkor kezdődik minden előlről:

$$\mathbb{E}(z^X) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^X | 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^X | \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^{1+X_1}) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

ahol X' azonos eloszlású X -szel. Így

$$g(z) = \frac{1}{6}zg_1(z) + \frac{5}{6}zg(z). \quad (3)$$

Ugyanígy felírjuk a teljes várható érték tételt g_1 -re is a soron következő dobás eredménye szerint. Ha 6-ost dobunk, akkor vége, ha pedig mást, akkor kezdődik minden előlről:

$$\mathbb{E}(z^{X_1}) = \mathbb{P}(6)\mathbb{E}(z^{X_1} | 6) + \mathbb{P}(\text{más})\mathbb{E}(z^{X_1} | \text{más}) = \frac{1}{6}\mathbb{E}(z^1) + \frac{5}{6}\mathbb{E}(z^{1+X'}),$$

vagyis

$$g_1(z) = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z). \quad (4)$$

A (4) egyenletet (3)-be visszaírva

$$g(z) = \frac{1}{6}z \left[\frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zg(z) \right] + \frac{5}{6}zg(z),$$

amit megoldva

$$g(z) = \frac{\frac{1}{36}z^2}{1 - \frac{5}{6}z - \frac{5}{36}z^2} = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}.$$

A várható érték ennek deriválásával kapható meg:

$$g'(z) = \frac{72z - 30z^2}{(36 - 30z - 5z^2)^2}, \quad \text{így} \quad \mathbb{E}X = g'(1) = 42.$$

3.6 Egy szabályos dobókockával addig dobálunk, amíg ki nem jön egy hatos. Jelölje X az *addig* dobott számok *összegét* (az utolsónak dobott hatost nem beleértve). Számoljuk ki

- X generátorfüggvényét,
- X várható értékét,
- X szórását.

Megoldás:

Jelöljük N -nel a dobások számát, az utolsó 6-ost nem beleértve, vagyis $X \sim \text{PessGeom}(p = \frac{1}{6})$ (pesszimista geometriai). Így N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{1}{6-5z}$ (a szokásos $q = 1 - p$ jelöléssel).

A keresett Y egy *véletlen tagszámú összeg*, éppen N taggal: $X = \sum_{i=1}^N Y_i$, ahol Y_1, Y_2, \dots függetlenek és azonos eloszlásúak, mégpedig egyenletes eloszlásúak az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. (*Figyelem:* az Y_i -k tényleg az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon egyenletesek, és *nem* az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ -on, mert az Y_i eloszlása egy kockadobás eredményének *feltételes eloszlása* azon feltétel mellett, hogy az eredmény nem 6-os.)

Ezek szerint az Y_i -k generátorfüggvénye

$$g_Y(z) = \frac{z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5}{5} = \frac{1}{5} \frac{z - z^6}{1 - z},$$

így

- a véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $g_X = g_N \circ g_Y$, vagyis

$$g_X(z) = g_N(g_Y(z)) = \frac{1}{6 - (z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)} = \frac{1}{6 - \frac{z - z^6}{1 - z}}.$$

- A várható értéket számolhatnánk a generátorfüggvény deriválásával is, de előadásról azt is tudjuk, hogy a véletlen tagszámú összegre $\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\mathbb{E}Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} - 1 = 5$, $\mathbb{E}Y_i = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, vagyis $\mathbb{E}X = 5 \cdot 3 = 15$.
- A szórást megint csak számolhatnánk a generátorfüggvény deriváltjaiból, de előadásról azt is tudjuk, hogy $D^2X = D^2N(\mathbb{E}Y_i)^2 + \mathbb{E}ND^2Y_i$. Esetünkben $\mathbb{E}N = 5$, $\mathbb{E}Y_i = 3$, továbbá az eloszlástáblázat szerint $D^2N = \frac{q}{p^2} = 30$ és $D^2Y_i = \frac{5^2-1}{12} = 2$. Így $D^2X = 30 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2 = 280$, $DX = \sqrt{280} \approx 16.73$.

3.7 Legyen $N \sim \text{Geom}(p)$ és $X_1, X_2, \dots \sim \text{Geom}(q)$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{i=1}^N X_i$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

N generátorfüggvénye $g_N(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$

Az X_i -k generátorfüggvénye $g_X(z) = \frac{qz}{1-(1-q)z}$

tétel
volt \rightarrow S_N generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \frac{p \frac{qz}{1-(1-q)z}}{1-(1-p)\frac{qz}{1-(1-q)z}} \quad \begin{array}{l} \text{b\"ov\"item} \\ \text{[1-(1-q)z]-vel} \end{array}$$

$$= \frac{pqz}{1-(1-q)z - (1-p)qz} = \frac{pqz}{1-[1-q+q-pq]z}$$

amiből látstik, hogy $S_N \sim \text{Geom}(pq)$

Hát persze: Móriska hamis dobokockáján a 6-os valószínűsége p , Pistikéén pedig q . Addig dobálják a két kockát együttre, amíg ki nem jön a 6-os mindkettőn együttesre.

Legyen N , hogy hányszor kiált fel ~~Móriska~~ Pistike, hogy "Nekem ~~van~~ megvan"! Legyen X_i az i -edik ilyen "rész-sikerhez" szükséges dobások száma. Látstik, hogy $N \sim \text{Geom}(p)$ és $X_i \sim \text{Geom}(q)$ függetlenek, és a játék teljes hossza S_N .

- 3.8 a.) Legyen $X \sim \text{PesszGeom}(p)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\text{Var}X$ szórásnégyzetet!
- b.) Legyen $Y \equiv 1$. Mennyi $\mathbb{E}Y$? Mennyi $\text{Var}Y$?
- c.) Legyen $Z = X + 1$, így $Z \sim \text{Geom}(p)$. Az összeg várható értékére és szórásnégyzetére vonatkozó tételek segítségével számoljuk ki az $\mathbb{E}Z$ várható értéket és a $\text{Var}Z$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$$a.) \quad k=0,1,2,\dots \text{ re } P(X=k) = (1-p)^k p \stackrel{q:=1-p}{=} q^k p,$$

így X generátorfüggvénye

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qz)^k \stackrel{\text{mértani}}{\text{sor}}$$

$$= p \frac{1}{1-qz} = \frac{p}{1-qz} = \frac{p}{1-(1-p)z}$$

$$\text{Ebből } g_X'(z) = [p(1-qz)^{-1}]' = p(1-qz)^{-2}(-q) = \frac{pq}{(1-qz)^2}$$

$$g_X''(z) = [pq(1-qz)^{-2}]' = -2pq(1-qz)^{-3}(-q) = \frac{2pq^2}{(1-qz)^3}$$

$$\Rightarrow g_X'(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{pq}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p} = \underline{\underline{\frac{1}{p} - 1}}$$

$$g_X''(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = \frac{2pq^2}{p^3} = \underline{\underline{\frac{2q^2}{p^2}}}$$

$$\text{Ebből } \boxed{E X = g_X'(1) = \frac{q}{p} = \frac{1}{p} - 1}$$

$$\boxed{\text{Var } X = g_X''(1) + g_X'(1) - [g_X'(1)]^2} = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^2 = \frac{2q^2 + qp - q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q(q+p)}{p^2} = \underline{\underline{\frac{q}{p^2}}}$$

b.) $\mathbb{E}X=1$, $\mathbb{E}X^2=1$, ebből $\text{Var} X=0$, hát persze.

$$\boxed{\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = \left(\frac{1}{p} - 1\right) + 1 = \frac{1}{p}}$$

$$\boxed{\text{Var} Z = \text{Var}(X+Y) = \text{Var} X + \text{Var} Y,}$$
$$= \frac{q}{p^2} + 0 = \frac{q}{p^2}$$

MERT X ÉS Y
FÜGGETLENEK

Hát persze: az $Y \equiv 1$ determinisztikus, így minden val. változótól független.

Megj: Ez így könnyebb, mint $g_Z(z) = \frac{pz}{1-qz} - t$
kétyszer lederiválni.

3.9 Legyen $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel a X generátorfüggvényét. Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\text{Var} X$ szórásnégyzetet!

Megoldás:

$$P(X=k) = e^{-1} \frac{1^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots, \text{ezt ért}$$

X generátorfüggvénye

$$\underline{g_X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-1} \frac{1^k}{k!} z^k = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1z)^k}{k!} =$$

definíció szerint

$$\underline{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}} \quad e^{-1} e^{1z} = e^{1(z-1)}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{Ebből } g_X'(z) = 1 e^{1(z-1)} \Rightarrow g_X'(1) = 1$$

$$g_X''(z) = 1^2 e^{1(z-1)} \Rightarrow g_X''(1) = 1^2$$

$$\text{tehát } \boxed{EX = g_X'(1) = 1}$$

$$\boxed{\text{Var } X = g_X''(1) + g_X'(1) - [g_X'(1)]^2 = 1^2 + 1 - 1^2 = 1}$$

$$[\text{Amiből persze a szórási } \sqrt{\text{Var } X} = \sqrt{1}.]$$

3.10 Legyenek $N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$ és $X_1, X_2, \dots \sim B(\frac{1}{3})$ teljesen függetlenek. Mi az $S_N := \sum_{k=1}^N X_k$ véletlen tagszámú összeg eloszlása?

Megoldás:

$N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{2})$, ezért N generátorfüggvénye

$$g_N(z) = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^{10} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^{10}.$$

$X_1, X_2, \dots \sim B(\frac{1}{3})$, ezért a közös generátorfüggvényük

$$g_X(z) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z.$$

Ebből a véletlen tagstámú összeg generátorfüggvénye

$$g_{S_N}(z) = g_N(g_X(z)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z\right]\right)^{10} = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{6}z\right)^{10},$$

ami éppen a $\text{Bin}(10, \frac{1}{6})$ eloszlás generátorfüggvénye,

$$\text{tehát } S_N \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6}).$$

[Hát persze: 10-szor feldobunk egy szabályos érmét.
Amikor az eredmény „fej”, eldobunk egy szabályos
dobbkockát is, és megpróbáljuk, hogy sikerül-e páras
számot dobni. $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik kockadobás páras} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$
 $N :=$ a dobott fejek száma.

[Így S_N a dobott páras számok száma, persze $\sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6})$]

3.11 Ha az $X \in \mathbb{N}$ valószínűségi változó eloszlása $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, akkor a generátorfüggvénye $g(z) := p_0 + p_1z + p_2z^2 + p_3z^3 + \dots$, amiből rögtön látszik, hogy $z \in (0, 1)$ -re $g(z)$ második deriváltja nemnegatív (meg persze az összes többi deriváltja is, de ez most nem fontos), vagyis $g(z)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon. Milyen legyen X eloszlása ahhoz, hogy $g(z)$ a $[0, 1]$ intervallumon ne csak

konvex, hanem szigorúan konvex legyen? (Vagy fordítva: hogyan fordulhat az elő, hogy $g(z)$ konvex, de nem szigorúan konvex?)

Megoldás:

$$g(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + \dots$$

$$g'(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + 4p_4 z^3 + \dots$$

$$g''(z) = 2p_2 + 3 \cdot 2 \cdot p_3 z + 4 \cdot 3 \cdot p_4 z^2 + \dots$$

Mivel $p_2, p_3, p_4, \dots \geq 0$, ezért $z > 0$ esetén $g''(z)$ csak úgy lehet nulla, ha $p_2 = p_3 = p_4 = \dots = 0$.

Vagyis p_0 és p_1 kivételével minden p_k -nek nullának kell lenni, hogy $g''(z) = 0$ lehessen.

~~A~~ Ezek pontosan akkor nullák, ha

X csak 0 vagy 1 lehet, vagyis Bernoulli eloszlás.

Röviden: $g(z)$ szigorúan konvex $[0, 1]$ -en, ha csak

nem $X \sim B(p)$ valamilyen $p \in [0, 1]$ -re,

melly esetben pontosan $g(z)$ lineáris vagy konstans.

4. Diszkrét idejű sorbanállási modellek

- 4.1 A $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$ várakozási idő evolúciós modell mintájára adjuk meg a D_n késleltetés evolúciós egyenletét ugyanabban a FIFO modellben! (Vagyis ahol az egyes igények érkezése között T_1, T_2, T_3, \dots idők telnek el, az egyes igények kiszolgálása egyesével, érkezési sorrendben)

történik, a kiszolgálási idők S_1, S_2, S_3, \dots .)

Megoldás:

Tudjuk, hogy $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$

A késleltetés $D_n = W_n + S_n$, így

$$D_{n+1} = W_{n+1} + S_{n+1} = \underbrace{(W_n + S_n - T_{n+1})_+}_{D_n} + S_{n+1}$$

Vagyis $D_{n+1} = (D_n - T_{n+1})_+ + S_{n+1}$

4.2 Egy könyvelő az asztalán lévő számlakupacból minden délelőtt feldolgoz valahány számlát, és pedig az n -edik nap délelőttjén V_n darabot (de legfeljebb annyit, amennyi van). Az iktatóból minden délután új számlák érkeznek a kupacra: az n -edik nap délutánján Y_n darab.

Jelölje \hat{X}_n a számlakupac méretét az n -edik napon *délben*.

Írjuk fel \hat{X}_n evolúciós egyenletét az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ egyenlet mintájára!

(Figyelem! Emlékezzünk, hogy X_n a számlakupac mérete volt az n -edik napon *éjfélkor*.)

Megoldás:

Az n -edik napon délelben a kupac mérete \hat{X}_n .

Ehhez délután jön még Y_n darab, így éjszakra a kupac mérete $\hat{X}_n + Y_n$.

Másnap délelőtt ebből feldolgoz V_{n+1} darabot (ha van annyi – persze a kupac mérete minuszba nem mehet),

így délre marad ~~X_{n+1}~~ $\hat{X}_{n+1} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+$

Alternatív megoldás: Tudjuk, hogy $X_n = \hat{X}_n + Y_n$

és $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$, amiből

$$\hat{X}_{n+1} + \cancel{Y_{n+1}} = (\hat{X}_n + Y_n - V_{n+1})_+ + \cancel{Y_{n+1}}$$

4.3 Pistike minden délelőtt tönkretesz egy játékautót a kisautós dobozából (már amikor van benne), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután érmedobással dönt arról, hogy elmenjen-e a játékboltba, ha pedig elmegy, akkor megint csak érmedobással dönt arról, hogy 1 vagy 2 játékautót vegyen Pistikének, amit még aznap este betesz a kisautós dobozba. (Vagyis minden délután $\frac{1}{4}$ val.séggel 1, $\frac{1}{4}$ val.séggel 2 játékautó érkezik.)

- Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?
- Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?
- Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?
- Tegnap este az anyuka betett egy vagy két autót az *üres* dobozba. Várhatóan (vagyis: várható értékben) hány nap múlva lesz a doboz újra üres?

Megoldás:

Pistike dobaza tulajdonképpen egy kistolgálsi sor:
 a „kistolgálás” az, amikor Pistike lenullázza a járművet.
 Így ha X_n a dobozban a kisautók száma az n -edik
 napon éjfélkor, akkor ez pont az előadásbeli

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$$

Sorhoszt-evolúciós egyenlet szerint fejlődik, ahol
 $V_n \equiv 1$ az n -edik délelőtt tönkretett kisautók száma
 (már ha van ennyi),

Y_n pedig az n -edik napon érkező kisautók száma.

Ennek eloszlása

k	0	1	2
$P(Y=k)$	$1/2$	$1/4$	$1/4$

Ebből $EV = 1$, $EY = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{4}$

$$E(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Var } Y = E(Y^2) - (EY)^2 = \frac{5}{4} - \frac{9}{16} = \frac{11}{16}$$

~~Legyen Π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius
 eloszlása~~

Mivel $EY < EV$, és nincs periodicitás, X_n stabil.

Legyen π az X_n Markov-lánc egyetlen stacionárius eloszlása: $X^{\text{stac}} \sim \pi$.

a.) Az ergodtétel miatt hosszú távon a 0 állapot arányában az időből $\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0)$.

A 7. előadásjegyzet 6. oldal tételle szerint

$$\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0) = 1 - \frac{EY}{EV} \stackrel{\text{esetünkben}}{=} 1 - \frac{3/4}{1} = \underline{\underline{1/4}}$$

[A tétel alkalmazásához kellett, hogy $V \in \{0, 1\}$.]

c.) A 7. előadás 2. oldal tételle szerint stacionárius állapotban a sorhozott várható értéke

$$E X^{\text{stac}} = \frac{EY(1-EY) + \text{Var } Y}{2(EV-EY)} = \frac{\frac{3}{4}(1-\frac{3}{4}) + \frac{11}{6}}{2(1-\frac{3}{4})} = \frac{17}{4}$$

A Little formula szerint pedig az átlagos várakozási idő (vagyis átlagosan a dobozban töltött éjszakák száma)

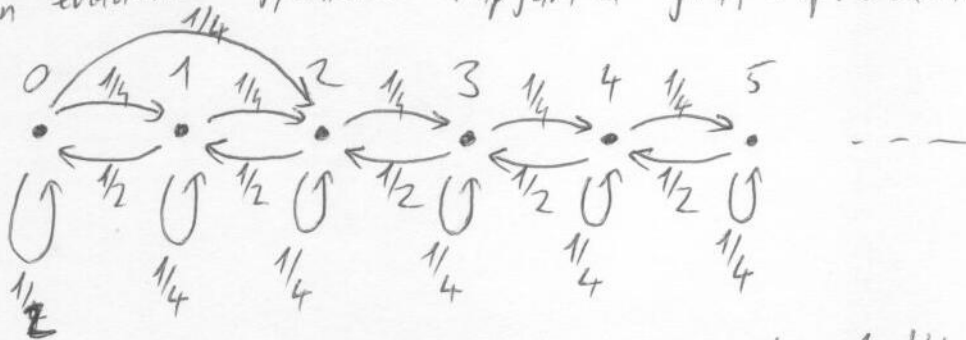
$$\boxed{\bar{D} = \frac{E X^{\text{stac}}}{EY} = \frac{17/4}{3/4} = \frac{17}{3} \text{ ~~22/3~~}}$$

d.) A 7. előadásjegyzet 7. oldal tételle szerint a foglaltsági periódus hosszának várható értéke

$$\boxed{E(\text{foglaltsági periódus hossza}) = \frac{EY}{P(Y \geq 1) | EV - EY} = \frac{3/4}{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{4})} = \underline{\underline{6}}}$$

b.) Ehhez sajnos ki kell számolni a stacionárius eloszlást.

X_n evolúciós egyenlete alapján a gráf-reprezentáció:



Vegyük észre, hogy X_n majdnem születési-halálzási folyamat: csak akkor változhat kettővel, ha $X_n = 0$ (így nincs mit fönkretenni), és 2 autó érkezik.

Így a $0 \leftrightarrow 1$ és $1 \leftrightarrow 2$ el kivételével érvényes a szül-hal folyamatok stac. eloszlására érvényes gondolatmenet:

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i} \quad \text{ha } i \geq 2,$$

$$\text{vagyis } \pi_i \cdot \frac{1}{4} = \pi_{i+1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \pi_{i+1} = \frac{1}{2} \pi_i \quad (i \geq 2).$$

A maradék 3 ismeretlenre (π_0, π_1, π_2) felírhatjuk a stacionaritást kézzel:

$$\textcircled{*} \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 P_{00} + \pi_1 P_{10} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{2} \\ \pi_1 = \pi_0 P_{01} + \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{4} + \pi_2 \cdot \frac{1}{2} \\ \pi_2 = \pi_0 P_{02} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \pi_3 P_{32} = \pi_0 \cdot \frac{1}{4} + \pi_1 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \pi_2 \end{cases}$$

Hurró! az nem új ismertlen, $\pi_3 = \frac{1}{2} \pi_2$

Mátrix-alakban

$$(\bar{\pi}_0 \quad \bar{\pi}_1 \quad \bar{\pi}_2) = (\bar{\pi}_0 \quad \bar{\pi}_1 \quad \bar{\pi}_2) \overbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}^A$$

amiből $(A^T - I) \begin{pmatrix} \bar{\pi}_0 \\ \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{pmatrix} = 0$, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & -3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ vagyis } \boxed{\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2}$$

[Adt perste: A \otimes rendszer első egyenletéből $\bar{\pi}_0 = \bar{\pi}_1$,
a 2. és 3. egyenlet jobboldala pedig ugyanaz, így $\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2$]

[Adt perste: Az A mátrix bisztochasztikus, vagyis nem
csak a sorösszegek 1-ek, hanem az oszlopösszegek
is, így az $(1 \ 1 \ 1)$ baloldali sajátvektora
a $\lambda = 1$ sajátértékhez: $(1 \ 1 \ 1)A = (1 \ 1 \ 1)$]

Igy a stac. eloszlás

$$\pi = \pi_0 \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \dots \right)$$

Normalizálás: $1 = \pi_0 \left(1 + 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_1 \right) = 4\pi_0$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{4},$$

$$\pi = \left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64} \quad \dots \right)$$

Végre választhatunk a b.) kérdésre:

legyen $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(i) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \geq 3 \\ 0, & \text{ha } i = 0, 1, 2 \end{cases}$

annak indikátora, hogy a dobozban 2-nél több autó

van: $f(X_0) + f(X_1) + \dots + f(X_{n-1})$ azt adja meg, hogy

az első n éjszakából hányszor volt 2-nél több autó.

Az ergodicitás szerint $f(X_n)$ időátlaga 1 valószínűséggel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(X_0) + \dots + f(X_{n-1})}{n} = \mathbb{E}_{\pi} f = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f(i),$$

Vagyis a keresett arány

$$\mathbb{E}_{\pi} f = \sum_{i=3}^{\infty} \pi_i = \mathbb{P}(X^{\text{stac}} \geq 3) = 1 - (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

4.4 Jancsika minden délelőtt p valószínűséggel autósat játszik, már ha éppen van kisautója. Ilyenkor tönkretesz két játékautót a kisautós dobozából (illetve, ha csak egy van, akkor azt az egyet), amit az apukája azonnal kidob. Az anyukája minden délután vesz egy új kisautót, amit még

aznap este betesz a kisautós dobozba.

- a.) Az éjszakák mekkora hányadában üres a doboz hosszú távon?
- b.) Hosszú távon az éjszakák mekkora hányadában van a dobozban 2-nél több autó?
- c.) Átlagosan hány éjszakát tölt egy kisautó a dobozban hosszú távon?

Megoldás:

a.) 0, hiszen a debet \emptyset staka soha nem üres:
mindent délután érkeznek egy kisautó.

b.) Pistike doboza egy kiszolgálási sor, kiszolgálás =
kidobás. Legyen X_n a dobozban a kisautók
száma (= sorhossz) az n . napon éjféltkor.

Az előadás-beli $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$

Sorhossz evolúciós egyenlet érvényes,

$Y \equiv 1$ az érkező autók = igbnyek száma $\Rightarrow \boxed{EY=1}$

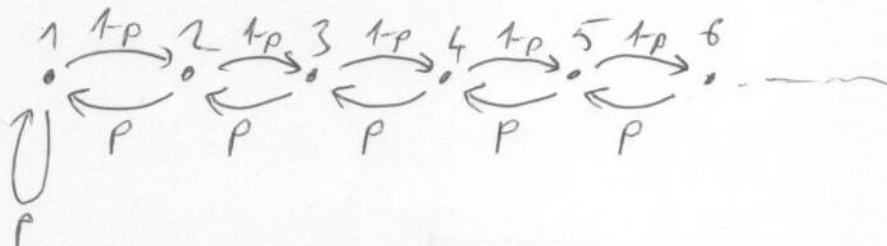
az n -edik napi „kiszolgálási kapacitás” $V_n \sim V$

elosztás

k	0	1	2
$P(V=k)$	$1-p$	0	p

$\Rightarrow \boxed{EV=2p}$

Ez alapján az X_n gráf-reprezentációja



Ez születési-halálozási folyamat: egyetlen stac. eloszlása az a π , amire $\frac{\pi_{i+1}}{\pi_i} = \frac{1-p}{p} =: \alpha, i=1,2,3, \dots$

vagyis $\pi = \pi_1 (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$, mdr perste π_1

az normalizáló.

Vagyis X_n stabil $\Leftrightarrow \alpha = \frac{1-p}{p} < 1 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2}$.

[Hát persze: a stabilitás feltétele (irreducibilis A aperiódikus esetben $\mathbb{E}V > \mathbb{E}Y$, vagyis $2p > 1$.)]

A stabil esetben rögtön látszik hogy

$$X^{stac} \sim \Pi = \text{Geom}(1-\alpha)$$

$q := 1-p$ jelöléssel $1-\alpha = 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}$

Az eredmény miatt a b) kérdésre a választ

b.) $1 - (1-\alpha + (1-\alpha)\alpha) = \alpha^2$

$$\underline{\underline{P(X^{stac} \geq 3)}} = 1 - (\cancel{\pi_1} + \pi_2) = 1 - (\cancel{\alpha} + \alpha^2) = \alpha^2$$

$$= \underline{\underline{\left(\frac{1-p}{p}\right)^2}}, \text{ ha } p > \frac{1}{2}$$

[Hát persze: X^{stac} így generálható, hogy hamis érmevel – amin a fej valószínűsége α – dobálunk az első fejis. $X^{stac} \geq 3$ pont azt jelenti, hogy az első két dobás irás.]

c.) A Little-formula szerint az átlagos várakozási idő

$$\bar{D} = \frac{\mathbb{E}X^{stac}}{\mathbb{E}Y} = \frac{\mathbb{E} \text{Geom}(\alpha)}{1} = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{p}{p-q} = \frac{p}{2p-1}, \text{ ha } p > \frac{1}{2}$$

Ha $p < \frac{1}{2}$, akkor X_n nem stabil, a kisautó elstaporednak

=) b.) 1 c.) ∞

4.5 Józsi bácsi minden este feldob egy szabályos érmét, és ha az eredmény fej, akkor megiszik egy üveg bort – feltéve persze, hogy van a kamrában bor. Cserébe minden délelőtt elgurít egy szabályos dobókockát, és ha az eredmény 6-os, akkor elmegy a boltba, hoz K üveg bort és beteszi a kamrába. (Itt $K \in \{1, 2, 3, \dots\}$.) Hosszú távon átlagosan hány deket tölt Józsi bácsi kamrájában egy üveg bor? (A választ adjuk meg K függvényében!)

Megoldás:

Fizési ~~szám~~ bicsi kamraje egy kiszolgálási sor, a
kiszolgálás a megívás. Legyen X_n a barok száma

a kamrában az n -edik napon délben. A kérdés az átlagos
költséget.

Ez az $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}$ differenciáegyenlet szerint

fejődik ahol V_{n+1} az n -edik este megívott barok száma

$$V_n \sim B\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow EV = \frac{1}{2}$$

Y_{n+1} az $(n+1)$ -edik délelőtt érkező barok

$$\text{Adama: } Y_n = \begin{cases} 0 & \frac{5}{6} \text{ valósz. sggel} \\ K & \frac{1}{6} \sim \end{cases}$$

amiből $EV = \frac{K}{6}$, $EY^2 = \frac{K^2}{6}$, $\text{Var } Y = \frac{K^2}{6} - \left(\frac{K}{6}\right)^2 = K^2 \frac{5}{36}$.

A rendszer akkor stabil, ha $EV > EY$, vagyis $K < 3$.

Igy a sorhozattac. elosztásának várható értéke a M -egyenletet 2. oldalának feltétele szerint

$$EX^{\text{stac}} = \int_0^{\infty} \frac{EY(1-EY) + \text{Var } Y}{2(EV-EY)} = \frac{\frac{K}{6}(1-\frac{K}{6}) + K^2 \frac{5}{36}}{2(\frac{1}{2} - \frac{K}{6})} \quad \text{ha } K < 3$$

Vagy rövidebben: $EX^{\text{stac}} = \begin{cases} \frac{5}{12}, & \text{ha } K=1 \\ \frac{7}{3}, & \text{ha } K=2 \\ \infty, & \text{ha } K \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \bar{D} = \begin{cases} 2.5, & \text{ha } K=1 \\ \frac{7}{3}, & \text{ha } K=2 \\ \infty, & \text{ha } K \geq 3 \end{cases}$

[Ezért a Little formulából az átlagos költséget $\bar{D} = \frac{EX^{\text{stac}}}{EV}$]

4.6 Móricka kurzusára 20 hallgató jár. Minden hallgató minden nap, egymástól és az előzményektől is függetlenül, 4% valószínűséggel ír egy (és csak egy) e-mailt Mórickának, szigorúan nappal. Móricka naponta pontosan 1 e-mailre válaszol (már ha éppen van mire), éspedig 23:00-kor. Hosszú távon átlagosan hány megválaszolatlan hallgatói levél van Móricka postaládájában *éjfélkor*?

(Vigyázat: éjfélkor!)

Megoldás:

Legyen X_n a megválasztatlan levelek száma az n -edik napon este 10-kor, vagyis az aznapi levelek érkezése után (de még a kiszolgálás előtt). Erre érvényes az

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1} \quad \text{sorhaszt-erődcións egyenlet,}$$

ahol $V_{n+1} \equiv 1$ az n -edik napon megválasztható levelek száma,

$Y_{n+1} \sim \text{Bin}(\text{~~20~~ } M=20, p=\frac{4}{100})$ az ~~az~~ $n+1$ -edik napon érkező levelek száma.

Mivel $EY = Mp = 0.8 < 1 = EV$, a rendszer stabil,

hiátáredestzésától tudjuk a sorhaszt várható értékét:

$$E X^{\text{stac}} \stackrel{\text{4. eq-jegyzet}}{\underset{\text{2. oldal}}{=}} \frac{EY}{2} + \frac{\text{Var}Y}{2(1-EY)}, \text{ vagy még inkább}$$

$$E X^{\text{stac}} \stackrel{\text{8. eq-jegyzet}}{\underset{\text{2. oldal}}{=}} \frac{Mp}{2} + \frac{Mp(1-p)}{2(1-Mp)} = \frac{0.8}{2} + \frac{0.8 \cdot 0.96}{2 \cdot 0.2} = 2.32$$

egyszerű csomag-koncentrátor

Sajnos azonban NEM EZ A KÉRDÉS:

Legyen Z_n a levelek száma az n -edik napon éjfélkor

$E Z^{\text{stac}}$ -ra nincs előre gyártott képletünk, ezért egy kicsit gondolkodni kell:

$$Z_n = \begin{cases} X_n - 1, & \text{ha } X_n \geq 1, \text{ mert akkor 23:00-kor egy levelet} \\ & \text{megválaszol} \\ 0, & \text{ha } X_n = 0, \text{ persze.} \end{cases}$$

Vagyis $Z_n = X_n - \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}}$

amiből $E Z_n = E X_n - E \mathbb{1}_{\{X_n \geq 1\}} = E X_n - P(X_n \geq 1)$
 $= E X_n - (1 - P(X_n = 0)).$

Ezre már van kétféle képlet a stacionárius esetben:

~~$E X_n$~~ $= E X^{stac} = 2,32$ már volt az előző

$P(X^{stac} = 0) \xrightarrow[\text{6. oldal}]{\text{7. előadás jegyzet}} 1 - \frac{EY}{EV} = 1 - M_p = 1 - 0,8$

$\Rightarrow E Z^{stac} = E X^{stac} - 0,8 = \underline{1,52}.$

Mivel a rendszer stabil, az ergodicitétel értelmében hosszú

távon átlagosan $E Z^{stac} = 1,52$ levél vár választárra
 éjszaka.

- 4.7 Egy oktátónak az az elve, hogy minden érkező emailre leghamarabb másnap válaszol, aznap érkezett levélre soha. Az általa tartott kurzus 10 hallgatójának mindegyike minden nap, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel küld egy emailt az oktátónak. (Egy nap egynél több emailt senki sem küld.) Az oktató minden nap pontosan egy hallgatói levélre válaszol (már ha van a postaládájában olyan, ami nem aznapi). Átlagosan hány éjszakát tölt az oktató postaládájában egy hallgatói levél hosszú távon?

Megoldás:

Oktatónk postaládája egy egyszerű csomagkezelés-
ráter $M=10$ ~~ak~~ küldővel, akik mindegyike $B(p=\frac{1}{20})$
elcsalási igényt küld időegységenként.

Igy az átlagos várakozási idő

A rendszer stabil,
mert $Mp < 1$.

$$\bar{D} = \bar{D}_{max} = \frac{1}{2} + \frac{1-p}{2(1-Mp)} = \frac{1}{2} + \frac{19/20}{2(1-\frac{1}{2})} = 1.45$$

- 4.8 Móricka vizsgát felügyel, és közben segít a hallgatóknak. A 10 hallgató között jár körbe-körbe, minden hallgatónál pontosan 1 percet tölt, és ezalatt megválaszol pontosan 1 kérdést, amit a hallgató feltesz (már ha a hallgatónak van kérdése). Minden hallgatónak minden percben, az előzményektől függetlenül, $\frac{1}{20}$ valószínűséggel jut eszébe egy kérdés (a maradék $\frac{19}{20}$ valószínűséggel egy se). Átlagosan hány perc múlva kap választ Pistike a kérdéseire hosszú távon? (Az pontosság/egyszerűség kedvéért fel kell tennünk, hogy Pistike minden eszébe jutó kérdéshez az időt Móricka előző látogatásától számítja, így minden kérdés „kiszolgálási ideje” percben mérve 10-nek többszöröse.)

Megoldás:

Móricka az $M=10$ felhasználó $B(p=\frac{1}{20})$ eloszlással
érkező igényeit időosztással szolgálja ki.
Igy az átlagos várakozási idő

$$\bar{D} = \bar{D}_{time} = \frac{M}{2} + \frac{M(1p)}{2(1-Mp)} = \frac{10}{2} + \frac{10 \cdot \frac{19}{20}}{2(1-\frac{1}{2})} = 14.5$$

(A rendszer stabil, mert $Mp < 1$.)

- 4.9 Róbert közrendőrnek 10 parancsnoka van, sorrendben 1., 2., ..., 10. számú parancsnok. Minden parancsnok, minden percben, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{20}$ valószínűséggel ad Róbertnek parancsot (mindenki csak 1-et). Ő azonban minden percben csak 1 parancsot tud végrehajtani.

Ha több végre nem hajtott parancs is van nála, akkor azt hajtja végre, amelyik a legmagasabb rangú (vagyis legkisebb sorszámú) parancsnoktól jött, a többit halogatja. (Az időt egész percekben mérjük. Tegyük fel, hogy egy parancsot leghamarabb az érkezését követő percben lehet végrehajtani.)

- a.) Hosszú távon átlagosan hány végre nem hajtott parancs van Róbert zsebében az 5. számú parancsnokától?
- b.) Hosszú távon átlagosan hány perc után hajtja végre Róbert a 5. számú parancsnoktól érkezett parancsokat?

Megoldás:

Róbertnek az $M=10$ parancsnek mindegyike alkalmanként $B(p)$ elosztási véletlen számú igényt küld (az előtérbenektől függetlenül, ahol $p = \frac{1}{20}$).

Az $M=10$ parancsok igényei = parancsai $M=10$ külön sorban állnak Róbert zsebében, amiket ő egy

egyirányú busz szabálya szerint szolgál ki.

Minket az $i=5$ ~~sor~~ prioritási sor érdekli,

legyen ennek sorhossza $X_{i,n}$ (ahol n az idő),

stacionárius eloszlása $\sim X_i^{stac}$.

a.) Az egyirányú buszra kistámolt képlet szerint

$$E X_i^{stac} = \frac{p}{2} + \frac{p(1-p)}{2} \frac{1}{(1-ip)(1-(i-1)p)} = \frac{i=5}{\frac{1}{(1-\frac{5}{20})(1-\frac{4}{20})}}$$

$$= \frac{1/20}{2} + \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20}}{2} \frac{1}{(1-\frac{5}{20})(1-\frac{4}{20})} = \dots = \frac{31}{480}$$

Az ergedtetel miatt ugyanennyi lesz hosszú távon az átlagos sorhossz.

b.) Az egyirányú buszra kistámolt képlet szerint az átlagos várakozási idő

$$\underline{\underline{\bar{D}_i}} = \frac{E X_i^{stac}}{E Y_{i,1}} = \frac{E X_i^{stac}}{p} = \frac{\frac{31}{480}}{\frac{1}{20}} = \underline{\underline{\frac{31}{24}}}$$

4.10 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1 - p$ valószínűséggel egy sem. A kiszolgálás érkezési sorrendben történik, a kiszolgálási idő mindig pontosan 2.

a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!

b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!

c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a.) Legyen W_n az n -edik igény várakozási ideje.

Ere $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol \Rightarrow $W_{n+1} = (W_n + 2 - T_{n+1})_+$

- $S_n \equiv 2$ minden n -re (a kiszolgálási idő)
- T_1, T_2, T_3, \dots független $\sim \text{Geom}(p)$: ennyi időt kell várni az egyes igények érkezésére.

b.) $T_{n+1} \sim \text{Geom}(p)$, így mindig ≥ 1 ,

így $S_n - T_{n+1} = 2 - T_{n+1} \leq 1$: W_n egy lépésben

legfeljebb 1-gyel nőhet:

$$P_{ij} := P(W_{n+1} = j | W_n = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j \geq i+2 \\ P(T_{n+1} = i+2-j), & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ P(T_{n+1} \geq i+2-j), & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

Mivel $P(T_{n+1} = k) = q^{k-1} p$ ahol $q = 1-p$, ezért

$$P(T_{n+1} = i+2-j) = p q^{i+1-j}, \quad P(T_{n+1} \geq i+2-j) = q^{i+1-j}$$

↑
egy p teljesítésű eredméllel debálva az első $(i+1-j)$ dobás irás

$$\Rightarrow P_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \geq i+2 \\ p q^{i+1-j} & \text{ha } 1 \leq j \leq i+1 \\ q^{i+1} & \text{ha } j = 0 \end{cases}$$

[Az állapotter $\{0, 1, 2, \dots\}$]

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ q^2 & p q & p & 0 & \dots \\ q^3 & p q^2 & p q & p & 0 & \dots \\ q^4 & p q^3 & p q^2 & p q & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

c.) A rendszer stabil $\Leftrightarrow ES_n < ET_n \Leftrightarrow 2 < \frac{1}{p}$

vagyis $P < \frac{1}{2}$

4.11 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1 - p$ valószínűséggel nem.

- a.) Írjuk fel a várakozási idő evolúciós egyenletét!
- b.) Írjuk fel a várakozási idő átmenetmátrixát!
- c.) Milyen p értékekre lesz a rendszer stabil?

Megoldás:

a) Legyen W_n az n -edik igény várakozási ideje.

Erre $W_{n+1} = (W_n + S_n - T_{n+1})_+$, ahol

- $S_n \sim \text{Geom}(p)$: ahányadikra egy igényt kifizetünk, onnantól számítva, hogy megérkezett és már nincs előtte másik
- $T_n \equiv 2$ az érkezési idő az előző érkezéstől

státusztól

vagyis
$$W_{n+1} = (W_n + S_n - 2)_+$$

b.) $S_n \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow S_n \geq 1$, ~~a sorhoz~~ $\Rightarrow S_n - 2 \geq -1$:

a várakozási idő 1 lépésben legfeljebb 1-gyel csökkenhet.

$$P_{ij} = P(W_{n+1} = j | W_n = i) = \begin{cases} q, & \text{ha } j \leq i-2 \\ P(S_n - 2 = j - i) = P(S_n = j - i + 2), & \text{ha } j \geq i-1 \text{ és } j \neq 0 \\ h_n, & j = 0 \\ \cancel{P(S_n - 2 \leq j - i) = P(S_n \leq 2 - i)}, & \text{ha } \end{cases}$$

$W_{n+1} = 0$ csak úgy lehet, ha $W_n = 0$ vagy $W_n = 1$, ezeket külön ki kell vizsgálni:

$$\begin{aligned} P_{00} &= P(W_{n+1} = 0 | W_n = 0) = P((S_n - 2)_+ = 0) = P(S_n - 2 \leq 0) = \\ &= P(S_n \leq 2) = P(S_n = 1) + P(S_n = 2) = p + pq \quad (q = 1-p) \end{aligned}$$

$$P_{10} = P(W_{n+1} = 0 | W_n = 1) = P((1 + S_n - 2)_+ = 0) = P(S_n - 1 \leq 0) =$$

$$= P(S_n \leq 1) = P(S_n = 1) = p$$

Ezek alapján a mátrix

$$P = \begin{pmatrix} p+pq & pq^2 & pq^3 & pq^4 & \dots \\ p & pq & pq^2 & pq^3 & \dots \\ 0 & p & pq & pq^2 & \dots \\ 0 & 0 & p & pq & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

[97 állapotok $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$]

c.) A rendszer stabil $\Leftrightarrow ES < ET \Leftrightarrow \frac{1}{p} < 2$

vagyis $\boxed{p > \frac{1}{2}}$

4.12 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe pontosan minden második időegységben érkezik egy igény. Minden időegységben, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel szolgálunk ki egy igényt (ha van), a maradék $1 - p$ valószínűséggel nem. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen \bar{X}_n a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az \bar{X}_n Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát!

Megoldás:

Nevezünk ciklusnak két egymás utáni időegységet úgy, hogy az új igény mindig a ciklus végén érkezik, és közvetlenül ez után jegyezzük fel a szerkesztést.

$[0, 2]$ az 1. ciklus

$[2, 4]$ a 2. ciklus

,
stb

Igy $\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + \bar{Y}_{n+1}$, ahol

$\bar{V}_{n+1} \sim \text{Bin}(2, p)$ az $(n+1)$ -edik ciklusban

kiszárgált igények száma

$\bar{Y}_{n+1} \equiv 1$ az újonnan érkező igények száma
(ez ciklusonként mindig 1)

Vagyis $\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + 1$

Láthatólag $\bar{X}_{n+1} \geq 1$, így az állapotter ~~$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$~~ $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Mivel $V_{n+1} \in \{0, 1, 2\}$, a szerkesztés legfeljebb 1-gyel változhat (ez egy születési-halálzási folyamat).

A sorhaszt. 1-gyel nö $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 0$, ennek val. sége

$$(1-p)^2 = q^2, \text{ ahol } q := 1-p$$

• Változatlan $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 1$, ennek val. sége $2pq$

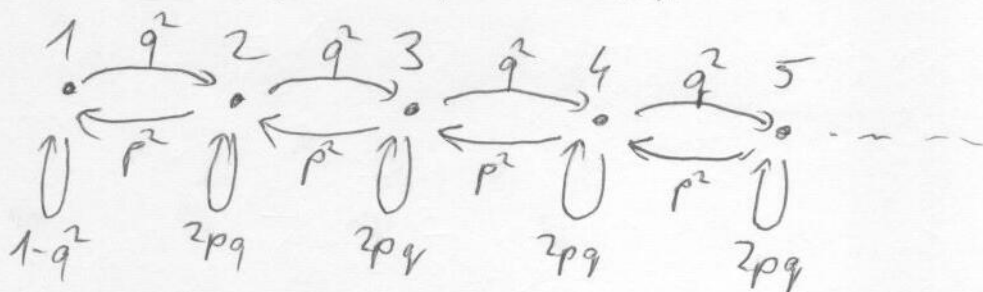
• 1-gyel csökken $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} = 2$, $\sim p^2$

hacsak nem eleve 1 volt a sorhaszt, mert

akkor változatlan $\Leftrightarrow \bar{V}_{n+1} \geq 1$,

ennek val. sége $2pq + p^2 = 1 - q^2$.

Vagyis a gráf-reprezentáció



Az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p^2 & 2pq & q^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & p^2 & 2pq & q^2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & p^2 & 2pq & q^2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & p^2 & 2pq & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

4.13 Egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszerbe minden időegységben az előzményektől függetlenül p valószínűséggel érkezik egy igény, a maradék $1 - p$ valószínűséggel egy sem. A kiszolgálási idő mindig pontosan 2. Nézzük a sor hosszát csak minden második időpillanatban, vagyis legyen \bar{X}_n a sor hossza $2n$ idő elteltével. Írjuk fel az \bar{X}_n Markov lánc evolúciós egyenletét és átmenetmátrixát! Közben gondoljuk át, hogy \bar{X}_n tényleg Markov-e.

Megoldás:

Álljon egy ciklus két szomszédos időegységből:

$[0, 2]$ az 1. ciklus

$[2, 4]$ a 2. ciklus

$[4, 6]$ a 3. ciklus, stb.

Legyen \bar{X}_n a sorhossza az n -edik ciklus végén,

vagyis $2n$ -kor

\bar{Y}_n az n -edik ciklus alatt érkező új igények

száma. $Ez \sim B(2, p)$ és független az előz-

ményektől. Ezen igények kiszolgálása akár

azonnal is elkezdődhet, de legkésőbb a kö-

vetkező ciklusban érhet véget.

Észrevétel: Ha $\bar{X}_n \geq 1$, akkor az $(n+1)$ -edik ciklusban,

vagyis $[2n, 2n+2]$ -ben biztosan pontosan 1 igényt

szolgálunk ki (bár nem lehet tudni, hogy mikor):

egy igény kiszolgálása már folyik és be is fog feje-
ződni, másire nem lesz idő.

• Ha viszont $\bar{X}_n = 0$, akkor az $(n+1)$ -edik ciklusban biztosan nem lesz kiszolgálás: Ha jön is egy igény az elején, azzal már nem végzünk.

Igy érvényes a stekases sorhossz-erdüciós egyenlet:

$$\bar{X}_{n+1} = (\bar{X}_n - \bar{V}_{n+1})_+ + \bar{Y}_{n+1},$$

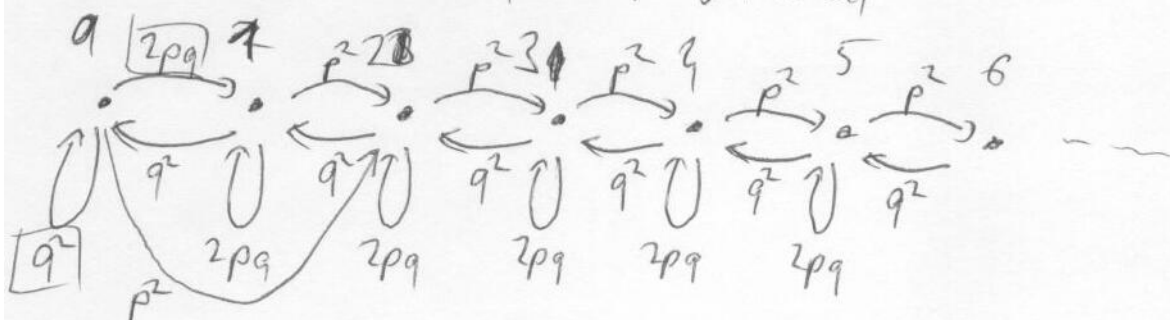
ahd $\bar{V}_{n+1} \equiv 1$ és $\bar{Y}_{n+1} \sim \text{Bin}(2, p)$.

Mivel Y_n független az előtörtélettől, $\boxed{\bar{X}_n \text{ Markov}}$.

• Ha $\bar{X}_n \geq 1$, akkor $\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + (\bar{Y}_{n+1} - 1)$ és a változás $(\bar{Y}_{n+1} - 1) \in \{-1, 0, 1\}$, vagyis a sorhossza legfeljebb 1-gyel változhat: \bar{X}_n majdnem születési-halálozási folyamat

• Ha viszont $\bar{X}_n = 0$, akkor $(\bar{X}_n - 1)_+ = (0 - 1)_+ = \cancel{0 - 1}$
 $= 0 = (1 - 1)_+$, vagyis

0-ból az átmenet-valségek ugyanazok, mint 1-ből: $q := 1 - p$ jelöléssel



Ebből az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \dots \\ q^2 & 2pq & p^2 & 0 & 0 & \\ 0 & q^2 & 2pq & p^2 & 0 & \\ 0 & 0 & q^2 & 2pq & p^2 & \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 2pq & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

[Vigyázat: az állapotok ~~1, 2, 3, 4, ...~~]

- 4.14 Alfréd bácsi orvosi rendelőjéhez a betegek szabályos időközönként érkeznek az előjegyzett időpontjukra: 8:00-tól kezdve minden 15 percen 1 beteg. A betegek pontosan érkeznek: 8:00-kor, 8:15-kor, 8:30-kor, stb.

Alfréd bácsi pontosan az érkezési idő után 1 perccel hívja be a betegeket (8:01-kor, 8:16-kor, 8:31-kor, stb.), és minden beteget pontosan 10 perc alatt lát el (a maradék időben a rendelőt fertőtleníti). Ám sajnos néha más dolga is van: minden egyes negyedórában, az előzményektől függetlenül $\frac{5}{6}$ valószínűséggel lát el beteget, a maradék $\frac{1}{6}$ valószínűséggel azonnali minisztériumi adatigénylésre kell válaszolnia. Ilyenkor a betegek türelmesen várnak a váróteremben.

Szerencsére nem minden beteg jelenik meg: mindegyik, az előzményektől függetlenül, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jön el (a többi nem értesült az időpontjáról).

Vilma néni estefelé érkezik az előjegyzett időpontjára, depressziós tünetekkel. Körülbelül mekkora valószínűséggel üres érkezésekor a váróterem? (Persze úgy értve, hogy az érkezése előtt közvetlenül.)

Megoldás:

Legyen X_n a váróteremben a sor hossza az n -edik érkezési időpont után közvetlenül (8:00:01-kor, 8:45:01-kor, stb.) Erre brúnyes a stacionárius

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1} \text{ evolúciós egyenlet, ahol}$$

$$V_{n+1} \sim B(p), \quad p = \frac{5}{6} \text{ az ellátható betegek száma}$$

$$Y_n \sim B(q), \quad q = \frac{4}{6} \text{ az érkező betegek száma az}$$

$$n\text{-edik időpontra.}$$

Vagyis ez egy „bindris-bindris modell”, stabil, mert g.p.

Legyen \tilde{X}_k a sor hossza közvetlenül a k-edik beteg
érkezése után!

A kérdés $\mathbb{P}(\tilde{X}_k = 1) \stackrel{?}{\approx}$, amikor k nagy,
ami a stabilitás miatt $\approx \mathbb{P}(X^{\text{stac}} = 1)$.

[VIGYÁZAT: ÉS NEM pedig $\mathbb{P}(X^{\text{stac}} = 0)$!!]

A 11. előadásjegyzet 9. oldal tételle szerint

$$\tilde{X}^{\text{stac}} \sim \text{Geom}(\alpha) \text{ ahol } \alpha = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)} \stackrel{\text{esetünkben}}{=} 1 - \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6}} = \frac{6}{10} = 0.6$$

Lehát $\mathbb{P}(\tilde{X}^{\text{stac}} = 1) = \alpha = 0.6$

4.15 Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

- a.) Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n -edik nap végén. Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját és számoljuk ki a stacionárius eloszlást!
- b.) Legyen most \tilde{X}_k a tejfölök száma a hűtőben a k -adik tejföl érkezése után! Mi az \tilde{X}_k Markov lánc stacionárius eloszlása? (*Tipp: erre volt előadáson egy tétel.*)
- c.) Tegyük fel, hogy Juliska néni a tejfölöket érkezési sorrendben használja el. Legyen D_k a k -adik tejföl által a hűtőben töltött éjszakák száma. Mi a D_k Markov lánc stacionárius eloszlása? (*Tipp: erre is volt előadáson egy tétel.*)

Megoldás:

Feliska néniék hűtője egy diszkrét idejű kistelgálási sor ahol q értékös és q kistelgálás is bináris:

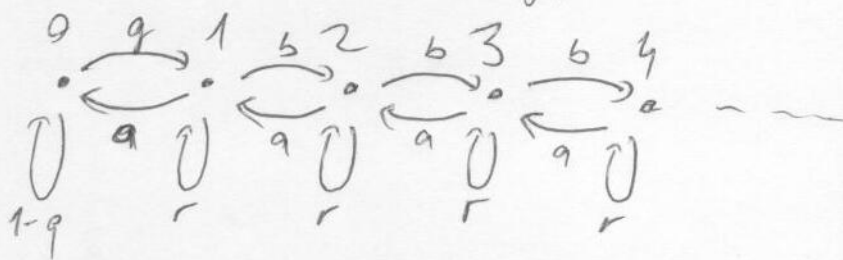
$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})_+ + Y_{n+1}, \text{ ahol}$$

$V_n \sim B(p)$ az n -edik napon tervezett ragulevesek száma
(ami akkor valósul meg, ha van tejföl)

$Y_n \sim B(q)$ az n -edik napon érkező tejfölök száma és mind független az előzményektől.

Így érdemesek a 11. előadás-jegyzet képletei és tételai:

a) X_n gráf-reprezentációja



ahol $a = p(1-q)$, $b = (1-p)q$, $r = 1-a-b$.

X_n átíratási-halálási polynomat, ebből a π stacion. eloszlás

$$\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} = \begin{cases} q/a, & \text{ha } k=0 \\ b/a, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_k = \begin{cases} \pi_0, & \text{ha } k=0 \\ \pi_0 \frac{q}{a} \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

ahol a normáláshoz $\pi_0 = 1 - \frac{q}{p}$ (lásd az előadást a számolásról)

Megj: π_0 a hosszadalmas számolás helyett ennán is tudható, hogy a 0.7. előadás-jegyzet 6. oldal tetele szerint az üresjárat valószínűsége

$$\pi_0 = P(X^{\text{stac}} = 0) = 1 - \frac{EY}{EV} = 1 - \frac{q}{p}$$

b.) A 11. előadás-jegyzet 9. oldal tetele szerint

$$\hat{X}^{\text{stac}} \sim \text{Geom}(\alpha) \quad \text{ahol} \quad \alpha = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$$

c.) A 11. előadás-jegyzet 14. oldal legalja:

$$D^{\text{stac}} \sim \text{Geom}(p\alpha) = \text{Geom}\left(\frac{p-q}{1-q}\right)$$

4.16 Jancsi bácsi és Juliska néni együtt él és közös hűtőt használ. Juliska néni nyugdíjas. Minden délelőtt, az előzményektől függetlenül, p valószínűséggel főz egy tejfölös ragulevest, és ehhez elhasznál a hűtőből 1 pohár tejfölt – feltéve persze, hogy van a hűtőben tejföl, mert ha nincs, akkor mást főz.

Jancsi bácsi minden délután, az előzményektől függetlenül, q valószínűséggel hoz egy pohár tejfölt a boltból, és beteszi a hűtőbe. Tegyük fel, hogy $p > q$ (különben a tejfölök elszaporodnak).

Legyen X_n a tejfölök száma a hűtőben az n -edik nap végén. Ennek időfejlődése könnyű, és most nem ezzel foglalkozunk.

Hanem: legyen most \tilde{X}_k a tejfölök száma a hűtőben a k -adik tejföl érkezése után! (Ez persze legalább 1.)

a.) Írjuk fel az \tilde{X}_k Markov lánc átmenetmátrixát! (Nyugodtan feltehetjük, hogy már az általunk „első”-nek számozott tejföl érkezése előtt is voltak tejfölök a hűtőben.)

(Tipp: $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig terbe vett ragulevesek száma, ami persze pont az elhasznált tejfölök száma, ha van ennyi tejföl. Pont ennek a V -nek az eloszlását számoltuk ki egy másik feladatban.)

(Megoldás:

$$P_{ij} := \mathbb{P}(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } j > i + 1 \\ A & , \text{ ha } j = i + 1 \\ (1 - A)L(1 - L)^{i-j} & , \text{ ha } 2 \leq j \leq i \\ (1 - A)(1 - L)^{i-1} & , \text{ ha } j = 1 \end{cases}$$

ahol $A = \frac{q-qp}{p+q-qp}$ és $L = \frac{q}{p+q-qp}$.)

- b.) Ellenőrizzük le kézzel, hogy \tilde{X}_k stacionárius eloszlása az $\alpha := 1 - \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$ paraméterű geometriai eloszlás! Vagyis azt kell ellenőrizni, hogy

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij},$$

ahol $\pi_i = \alpha(1 - \alpha)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

(Tipp: csodák csodája, $(1 - \alpha)(1 - L) = A$.)

Megoldás:

A tipp szerint $\tilde{X}_1 = (\tilde{X}_0 - V)_+ + 1$, ahol V az első tejföl érkezéséig térbe vett rakodások száma. A 3.10-es feladat pont ennek a V -nek az eloszlásáról szólt, és tudjuk belőle, hogy

$$P(V=k) = \begin{cases} A, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)L(1+L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases} \quad P(V \geq k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=0 \\ (1-A)(1+L)^{k-1}, & \text{ha } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ahol } A = \frac{q - qp}{p + q - qp} \quad \text{és} \quad L = \frac{q}{p + q - qp}$$

Innan

$$b.) P_{ij} := P(\tilde{X}_1 = j | \tilde{X}_0 = i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } j > i+1 \\ P(V=0) = A, & \text{ha } j = i+1 \\ P(V = \underbrace{i - (j-1)}_{\geq 1}) = (1-A)L(1+L)^{i-j}, & \text{ha } 2 \leq j \leq i \\ P(V \geq i) = (1-A)(1+L)^{i-1}, & \text{ha } j = 1 \end{cases}$$

[Fontos: $\tilde{X}_1 = (\dots)_+ + 1 \geq 1$, tehát az állapotok
~~1, 2, 3, ...~~
 Hat persze: mindig egy tejföl érkezése után néztük a
 hűtőt — ilyenkor sose üres.]

b.) A feladat jelöléseivel legyen $\pi_j^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij}$ $j=1,2,3,\dots$

Ekkor $\pi_1^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{i1} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{i-1} (1-A) (1-L)^{i-1} =$

$$= \alpha (1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + [(1-\alpha)(1-L)]^3 + \dots \right]$$

$$= \alpha (1-A) \frac{1}{1 - (1-\alpha)(1-L)} \quad \begin{array}{l} \text{csodák csodája:} \\ (1-\alpha)(1-L) = A \end{array} \quad \alpha (1-A) \frac{1}{1-A}$$

$$= \alpha = \pi_1 \quad \checkmark$$

• $j \geq 2$ -re

$$\pi_j^1 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{ij} = \sum_{i=1}^{j-2} \pi_i \cdot 0 + \pi_{j-1} P_{j-1,j} + \sum_{i=j}^{\infty} \pi_i P_{ij} =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + \sum_{i=j}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^{i-1} (1-A) L (1-L)^{i-j} =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + L \alpha (1-\alpha)^{j-1} (1-A) \left[1 + [(1-\alpha)(1-L)] + [(1-\alpha)(1-L)]^2 + \dots \right] =$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-2} A + L \alpha (1-\alpha)^{j-1} (1-A) \frac{1}{1 - (1-\alpha)(1-L)}$$

A, még mindig

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-1} \left[\frac{A}{1-\alpha} + L \right] \frac{\frac{A}{1-\alpha} = 1-L}{\text{még mindig}} \alpha (1-\alpha)^{j-1} [1-L+L]$$

$$= \alpha (1-\alpha)^{j-1} = \pi_j \quad \checkmark \quad \text{Hurra, hurra, hurra.}$$

4.17 Egy zajos csatornán másodpercenként 10^8 bitet tudunk átküldeni. Minden átküldött bit a többitől függetlenül 10^{-6} valószínűséggel sérül. A csatornán csomagokat küldünk át, amik N adatbit-

ből és 64 kísérő bitből állnak. A vevő az esetleges hibákat teljes biztonsággal észleli és „negatív nyugtát” küld róluk, ami teljes biztonsággal megérkezik a küldőhöz. Ilyenkor a teljes csomagot újra kell küldeni. Másodpercenként legfeljebb hány bitnyi adatot lehet a csatornán átvinni hosszú távon, ha N -et jól választjuk meg, és

- a.) a csomag elküldése után a nyugta azonnal megérkezik?
- b.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg, és meg kell várni, mielőtt a következő csomagot küldeni kezdjük?
- c.) a nyugta a csomag elküldése után pontosan 1 másodperccel érkezik meg. Mi addig is küldjük a következő csomagokat, de ha negatív nyugta jön, akkor visszaugrunk a hibás csomagra és onnan folytatjuk, a csomagok sorrendjét továbbra is megtartva? *(Tipp: ebben az esetben az optimalizálás csak numerikusan megy. Nem kell túlzásba vinni: ábrázoljuk a kapacitást N függvényében, és olvassuk le a maximumot.)*

Megoldás:

Ez a „Csomagküldés zajos csatornában” probléma.

A jegyet jelöléseivel

- $t_0 = 10^{-8}$ az egy bit átviteléhez szükséges idő (ami a jegyzetben $1 \mu s$ volt)
- $p_b = 10^{-6}$ a bithiba-valószínűség
- $M = 64$ a kísérő bitek száma

a.) Késlettelésmentes nyugta esete: a jegyzet szerint

$\alpha := -\ln(1-p_b) = -\ln(1-10^{-6}) \approx 10^{-6}$ jelöléssel az optimális N érték

~~$$N_{opt} = \frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\alpha}} \approx \frac{64}{2} + \sqrt{\frac{64^2}{4} + \frac{64}{10^{-6}}} \approx 32 + \sqrt{1024 + 64 \cdot 10^6} \approx 32 + \sqrt{64000000} \approx 32 + 8000 \approx 8032$$~~

- a közelítő képlet szerint $N_{opt} \approx \sqrt{\frac{M}{p_b}} = 8000$, és ekkor

$$r_{opt} \approx 1 - 2\sqrt{M p_b} \approx \boxed{0.984}$$

- a pontos érték $N_{opt} = \frac{M}{2} + \sqrt{\frac{M^2}{4} + \frac{M}{\alpha}} \approx 7969.06$

amiből $r = \frac{N(1-p_b)}{M+N}$ miatt

$N = 7968$ -ra $r = \boxed{0.9840957825}$

$N = 7969$ -re $r = \boxed{0.9840957824}$

låtthatólag mindegy

Vagyis lényeges idővel számolva a kapacitás

$$\boxed{\approx 98,400,000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}} = 9,84 \cdot 10^7 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}$$

b.) Stop-and-wait protokoll esete $\bar{L} = 1 \text{ sec}$ várakozási idővel, vagyis $\bar{L} = K t_0$ ahol $K = 10^8$.

Az átvitel sebességét szerint az optimális adatcsomagméret

$$N_{\text{opt}} = -\frac{M+K}{2} + \sqrt{\frac{(M+K)^2}{4} + \frac{M+K}{\alpha}} \approx 990195,$$

amiből az optimális kapacitás

$$\Gamma_{\text{opt}} = \frac{N_{\text{opt}} (1-p_b)^{M+N}}{M+N_{\text{opt}} + K} \approx 0.00364231,$$

vagyis valós időben ~~364~~ $\approx \boxed{364000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$

c.) Go-back-N protokoll esete, továbbra is $K = 10^8$.

A jegyzet szerint a kapacitás N függvényében

$$\Gamma = \Gamma(N) = \frac{N (1-p_b)^{M+N}}{M+N+K(1-(1-p_b)^{M+N})}.$$

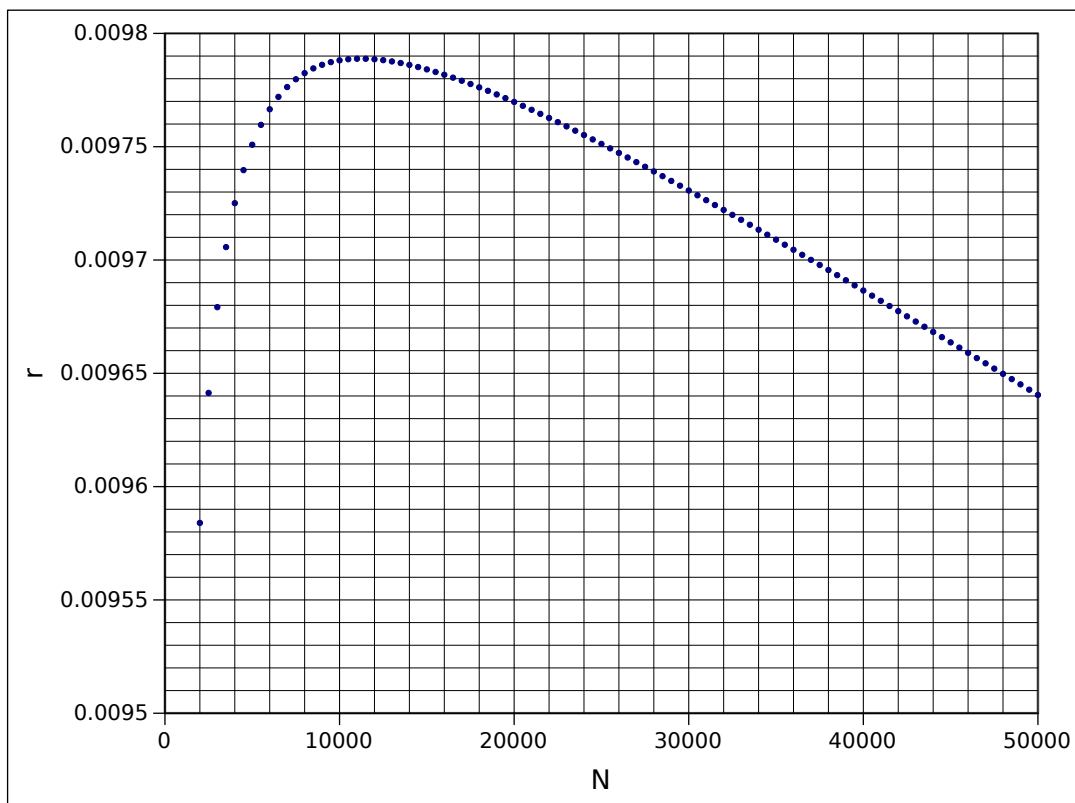
Ezt N függvényében ábrázolva és a maximum környékét kinagyítva (lásd ábra), látszik, hogy

$$N_{\text{opt}} \approx 11000 \text{ mellett } \Gamma_{\text{opt}} \approx 0.00949,$$

vagyis az elérhető kapacitás $\approx \boxed{949000 \frac{\text{bit}}{\text{sec}}}$.

4.18 Jancsi egy listáról ZH-eredményeket diktál Juliskának, aki a Neptunba írja őket. Ciklusokban dolgoznak: egy ciklus során

- Jancsi 5 másodperc alatt bemond egy nevet a listáról,
- majd lediktálja 4 hallgató pontszámát, 5 másodpercenként egyet. (Vagyis a négyből három



5. ábra. Kapacitás az adacsomag méretének függvényében, Stop-and-wait eset

hallgató nevét Jancsi nem mondja be: bízik benne, hogy helyes sorrendben vannak a listán.)

- Ez után Juliska szintén 5 másodperc alatt visszajelez, hogy mindent jól értett-e.

(Így az egész ciklus $5+20+5=30$ másodpercig tart.) Ha Juliska mindent értett, akkor mennek tovább, ha viszont nem, akkor újakezdik a ciklust.

Juliska a neveket és az egyes pontszámokat is 90% valószínűséggel érti, egymástól függetlenül.

- Percenként hány pontszámot tudnak így beírni hosszú távon?
- Lehetne gyorsabban haladni, ha Jancsi nem 4-esével diktálná az eredményeket? Ha igen, hányasával lenne optimális?

Megoldás:

Jancsi a pontszámokat Step-and-Wait protokoll szerint
 diktolja a zajos csatornán. ~~Az időegység~~ 1 bitnek meg-
 felel egy nőv vagy egy pontszám.

~~Az időegység~~

A diszkrét időegység $t_0 = 5 \text{ s}$,

az adatcsoport mérete $N = 4$

a kisbő bitek száma $M = 1$

a késleltetés szintén 5 s , diszkrét időben mérve $K = 1$.

A bithiba-valószínűség $P_b = 0.1$

a.) A 12. előadásjegyzet 9. oldala szerint az átlagosan átvihető
 adatbitek (vagyis ZH-pontszám) száma időegységenként

$$r = \frac{N(1-P_b)^{M+N}}{M+N+K} = \frac{4(1-0.1)^{1+4}}{1+4+1} = 0.39366 \quad \left[\begin{array}{l} \text{per öt} \\ \text{másodperc} \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \text{per centenként} \quad \frac{1 \text{ min}}{5 \text{ sec}} \cdot r = 12r = \underline{\underline{4.7239}} \text{ ZH-pontszám.}$$

b.) A 12. ea-jegyzet 10. oldala szerint az optimális adatcso-
 magméret

$$N_{\text{opt}} = -\frac{M+K}{2} + \sqrt{\frac{(M+K)^2}{4} + \frac{M+K}{\alpha}} \quad \text{ahol}$$

$\alpha = -\ln(1-P_b)$. Esetünkben

$$N_{\text{opt}} = -\frac{1+1}{2} + \sqrt{\frac{(1+1)^2}{4} + \frac{1+1}{-\ln 0.9}} \approx 3.47$$

\Rightarrow vagy $N=3$, vagy $N=4$ a nyáró.

$$N=3\text{-ra} \quad r = \frac{3(1-0.1)^{1+3}}{1+3+1} = 0.99366 \quad \underline{\underline{\text{ugyanannyi}}} \Rightarrow$$

NINCS
70BB.

4.19 Józsika rengeteg egymásra épülő házi feladatot old meg, naponta 1-et. (Reggel kezdi el, éjfélkor adja be). Minden megoldást $\frac{1}{10}$ valószínűséggel ront el, az előzményektől függetlenül (feltéve persze, hogy a korábbi feladatai jók). A tanára a javítással késésben van: minden feladatról a beadás után 10 nappal (éjfélkor) jelez vissza, hogy jó-e. Ha rossz, akkor Józsika kénytelen visszaugrani az adott feladatra, és onnan folytatni az egész sorozatot. Napi átlagban hány feladatot tud Józsika helyesen megoldani hosszú távon?

Megoldás:

Józsika tevékenysége megfelel a zajos csatornán való csomagküldésnek **Go-Back-N** protokoll szerint:

1 feladat ~~szé~~ felold meg 1 bitnek

a küldési sebesség $1 \frac{\text{bit}}{\text{nap}}$ (az időegység 1 nap)

az adatbitok száma csomagonként $N=1$

a kísérő bitok száma $M=0$

a hiba-valószínűség $P_b = \frac{1}{10}$

a nyugta késleltetése $K=10$ (napban)
 (standardunk)

így az elérhető átviteli kapacitás a 12. előadás-jegyzet 13. oldaláról

$$r = \frac{N(1-p_b)^{M+N}}{M+N+K[1-(1-p_b)^{M+N}]} = \frac{1(1-\frac{1}{10})^{0+1}}{0+1+10[1-\frac{1}{10}^{0+1}]} = \frac{0.9}{2} = 0.45$$

Vagyis Józsika napi átlagban hosszú távon

$r = 0.45$ feladatot tud helyesen megoldani.

5. Poisson folyamat

5.1 Egy várban lévő száraz kút mellett rengeteg turista megy el. Ezek mindegyike egymástól függetlenül, valamilyen kis valószínűséggel egy pénzérmét dob a kútba, amibe így egy nap alatt átlagosan 50 érme hull. Ezek mindegyike 50% valószínűséggel esik a „FEJ” oldalával felfelé, a többtől függetlenül.

- a.) Legyen X az egy nap alatt (mondjuk június 1-én) a kútba dobott érmék száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség?
- b.) Legyen Y az egy nap alatt „FEJ” oldalával felfelé a kútba eső érmék száma. A teljes várható érték tétel segítségével számoljuk ki Y várható értékét. (Segítség: *Mi is lesz Y feltételes eloszlása (ill. feltételes várható értéke) az $\{X = n\}$ feltétel mellett?*)
- c.) Számoljuk ki Y eloszlását, vagyis a $\mathbb{P}(Y = k)$ valószínűségeket a teljes valószínűség tétel segítségével! (Segítség: $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!} = e^x$.)

Megoldás:

- a.) Mivel sok kísérlet egymástól függetlenül kis valószínűséggel sikeres és X a sikeres kísérletek száma, Poisson eloszlással modellezzük: $X \sim Poi(\lambda)$, ahol a paraméter $\lambda = \mathbb{E}X = 50$ a szöveg szerint. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-50} \frac{50^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

- b.) Azon feltétel mellett, hogy $X = k$, vagyis k érme esik a kútba, Y várható értéke $\frac{1}{2}k$, hiszen az érmék átlagosan fele esik fejjel felfelé. Vagyis $\mathbb{E}(Y | X = k) = \frac{k}{2}$. Az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, így a teljes várható érték tétel miatt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \mathbb{E}(Y | X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \frac{k}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2} \mathbb{E}X = 25. \end{aligned}$$

- c.) Ha tudjuk, hogy n érme esik a kútba, és ezek mindegyike a többtől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lesz fej, akkor a fejek száma ezen $\{X = n\}$ feltétel mellett binomiális eloszlású n és $p = \frac{1}{2}$ paraméterekkel. Matematikai jelöléssel:

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

ha $0 \leq k \leq n$, vagyis ha $n \geq k$. Ezzel szemben $n < k$ -ra persze $\mathbb{P}(Y = k | X = n) = 0$. Mivel az $\{X = k\}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, a teljes valószínűség tétel miatt

minden $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ -re

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(Y = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k} q^{n-k}}{(n-k)!} = \\
 &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^l}{l!} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} e^{q\lambda} = e^{-(1-q)\lambda} \frac{\lambda^k p^k}{k!} = \\
 &= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!},
 \end{aligned}$$

ahol $\mu = p\lambda = 25$, vagyis $Y \sim Poi(\mu)$: a „FEJ” oldallal felfelé érkező érmék száma Poisson eloszlású $\mu = 25$ paraméterrel.

5.2 A mazsolás kalács úgy készül, hogy egy nagy kondérban sok tésztához sok mazsolát öntenek, jól elkeverik, majd egy nagy kalácsot sütnek belőle, amit sok szeletre vágunk. A szeletek egyikét Móricka eszi meg. Vegyük úgy, hogy minden mazsola egymástól függetlenül, azonos, kicsi valószínűséggel kerül Móricka szeletébe.

- a.) Egy szeletbe átlagosan 6 szem mazsola szokott jutni. Mennyi a valószínűsége, hogy Móricka szeletébe 2-nél kevesebb jut?
- b.) Pistike is kapott egy szelet kalácsot, és boldogan újságolta, hogy 12 szem mazsolát talált benne. Ezek után mennyi a (feltételes) valószínűsége annak, hogy Móricka szeletébe viszont 2-nél kevesebb került?

Megoldás:

- a.) Legyen X a Móricka szeletébe kerülő mazsolák száma. X jó közelítéssel Poisson eloszlású, mert sok mazsola próbálkozik, hogy bekerüljön, mindegyik a többitől függetlenül kis valószínűséggel jár sikerrel, X pedig a sikeres próbálkozók száma. A λ paraméter pedig a várható érték: $\lambda = 6$. Így

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X < 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} = e^{-\lambda}(1 + \lambda) = \\
 &= 7e^{-6} \approx 0.017 = 1.7\%.
 \end{aligned}$$

- b.) Legyen Y a mazsolák száma Pistike szeletében. Mivel a kondér nagy és a mazsola sok, X és Y jó közelítéssel független, így

$$\mathbb{P}(X < 2 | Y = 12) = \mathbb{P}(X < 2) \approx 1.7\%$$

továbbra is.

5.3 Egy 1000-oldalas könyvben 1500 sajtóhübe van, véletlenszerűen elszórva.

- a.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 sajtóhübe van?
- b.) Körülbelül mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2, a 42-ediken pedig pontosan 2 sajtóhübe van?

- c.) A sajtóhubáknak kb. $\frac{1}{3}$ -a vesszőhiba (abban az értelemben, hogy minden sajtóhuba $\frac{1}{3}$ valószínűséggel vesszőhiba, a többitől függetlenül). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 13-adik oldalon legalább 2 vesszőhiba és pontosan 1 egyéb sajtóhuba van?

Megoldás: Az egyes oldalakra eső sajtóhubák száma Poisson eloszlással közelíthető, mivel sok sajtóhuba próbálkozik egymástól lényegében függetlenül, hogy pont oda essen, és ez mindegyiknek kicsi valószínűséggel sikerül. Sőt, az egyes oldalakon lévő sajtóhubák száma jó közelítéssel független, ugyanilyen megfontolásból. Ezek után csak a várható értékükre van szükség, ami persze az adott oldalszámra eső hubák átlagos száma.

- a.) Jelölje X_{13} a 13-adik oldalra eső sajtóhubák számát. A fentiek alapján ez jó közelítéssel Poisson eloszlású $\lambda = \frac{1500}{1000} = 1.5$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-1.5} \frac{(1.5)^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Emiatt

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) \approx 1 - e^{-1.5} - e^{-1.5} \cdot 1.5 \approx 0.44.$$

- b.) Legyen X_{42} a 42-edik oldalra eső sajtóhubák száma. A fentiek miatt X_{42} is $Poi(1.5)$ eloszlással közelíthető és X_{13} -tól jó közelítéssel független, vagyis

$$\mathbb{P}(X_{13} \geq 2 \text{ és } X_{42} = 2) \approx \mathbb{P}(X_{13} \geq 2) \mathbb{P}(X_{42} = 2) \approx 0.44 \cdot e^{-1.5} \frac{(1.5)^2}{2!} \approx 0.11.$$

- c.) Sőt, a vesszőhibák és az egyéb sajtóhubák száma jó közelítéssel külön-külön is Poisson eloszlású és egymástól független, ugyanilyen megfontolásból. Ezért ha Y_{13} a 13-adik oldalon lévő vesszőhibák száma, Z_{13} pedig a 13-adik oldalon lévő egyéb sajtóhubák száma, akkor jó közelítéssel $Y_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{1}{3}}{1000})$, $Z_{13} \sim Poi(\frac{1500 \cdot \frac{2}{3}}{1000})$ és ezek függetlenek. Így

$$\mathbb{P}(Y_{13} \geq 2 \text{ és } Z_{13} = 1) \approx (1 - e^{-0.5}(1 + 0.5)) (e^{-1} \cdot 1) \approx 0.033.$$

5.4 Egy radioaktív sugárforrás nagyon sok bomlásra képes atommagból áll, melyek mindegyike valamilyen kis valószínűséggel bomlik el éppen az általunk megfigyelt időintervallumban (és bocsát ki észlelhető sugárzást), a többi atommagtól függetlenül. A minta aktivitása $0.1Bq$ (vagyis Becquerel), ami azt jelenti, hogy másodpercenként átlagosan 0.1 bomlás történik.

- a.) Legyen X az egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) történő bomlások száma. Milyen eloszlással jó ezt modellezni? Vagyis mennyi a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűség (és melyik k -kra)?
- b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig pontosan 4 bomlás történik, 08:01-től 08:03-ig pedig pontosan 10?
- c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 09:00-tól a következő bomlásig legalább 10 másodpercet kell várni?

Megoldás:

- a.) X a sikeres próbálkozók száma nagyon sok független próbálkozásból, nagyon kis sikervalóság mellett, így $X \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = \mathbb{E}X$. Esetünkben $\lambda = \mathbb{E}X = 60s \cdot 0.1Bq = 6$, vagyis $X \sim Poi(6)$, ami azt jelenti, hogy

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-6} \frac{6^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

b.) Legyen $X_{[0,1]}$ a 08:00 és 08:01 közötti bomlások száma, $X_{[1,3]}$ a 08:01 és 08:03 közötti bomlások száma. Ezek diszjunkt intervallumok, ezért $X_{[0,1]}$ és $X_{[1,3]}$ függetlenek. Továbbá $X_{[0,1]} \sim Poi(6)$ az előző részből, és hasonlóan $X_{[1,3]} \sim Poi(12)$. Ezért

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4 \text{ és } X_{[1,3]} = 10) &= \mathbb{P}(X_{[0,1]} = 4)\mathbb{P}(X_{[1,3]} = 10) = \\ &= e^{-6} \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-12} \frac{12^{10}}{10!} \approx 0.134 \cdot 0.105 \approx 0.01403 \end{aligned}$$

c.) Legyen Y a 09:00:00 és 09:00:10 közötti bomlások száma. Az előzőekhez hasonlóan $Y \sim Poi(1)$. Vegyük észre, hogy pontosan akkor kell legalább 10 másodpercet várni, ha 10 másodperc alatt nem történik bomlás, vagyis a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-1} \frac{1^0}{0!} = e^{-1} \approx 0.368.$$

Alternatív megoldás: Legyen τ a 09:00 után történő első bomlásig a várakozási idő másodpercben. A Poisson-folyamat tulajdonságai miatt $\tau \sim Exp(\lambda)$ ahol $\lambda = \frac{1}{10}$ a folyamat intenzitása. Így

$$\mathbb{P}(\tau \geq 10) = 1 - F_{Exp(\frac{1}{10})}(10) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{10} \cdot 10}\right) = e^{-1} \approx 0.368$$

5.5 Egy radioaktív mintában másodpercenként átlagosan 3 kis energiájú és 1 nagy energiájú alfa-részecske keletkezik. A detektorunk a nagy energiájú részecskéket 90% valószínűséggel észleli, a kis energiájúakat viszont csak 20% valószínűséggel (a többi részecskétől függetlenül). Mennyi a valószínűsége, hogy egy két másodperc hosszú időintervallumban legalább 4 részecskét észlel?

Megoldás: A nagy energiájú alfa-részecskék Poisson-folyamat szerint keletkeznek, 1 rátával. (Az időt mérjük másodpercben.) Az észlelt nagy energiájú részecskék folyamata ennek egy ritkítése, ezért szintén Poisson-folyamat, $1 \cdot 0.9 = 0.9$ rátával. Ugyanígy, a kis energiájú alfa-részecskék is Poisson-folyamat szerint keletkeznek 3 rátával, tehát az észlelt kis energiájú részecskék folyamata is Poisson-folyamat, $3 \cdot 0.2 = 0.6$ rátával. A kétféle észlelt részecske folyamata független, ezért az uniójuk is Poisson-folyamat – és a ráták összeadódnak.

Összefoglalva a lényeg: az összes észlelt részecske folyamata Poisson-folyamat, $0.9 + 0.6 = 1.5$ rátával.

Legyen X a két másodperc alatt észlelt részecskék száma. Így $X \sim Poi(\lambda)$, ahol $\lambda = \mathbb{E}X = 2 \cdot 1.5 = 3$. Vagyis $k = 0, 1, 2, \dots$ -re $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-3} \frac{3^k}{k!}$. A kérdésre a válasz:

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(X = k) = 1 - e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{6}\right) = 1 - 13e^{-3} \approx 0.3528 \approx 35\%.$$

5.6 A radioaktív ^{14}C atommag élettartama (vagyis a létrejöttétől a bomlásáig eltelt idő) exponenciális eloszlású. A felezési idő 5730 év, ami azt jelenti, hogy egy sok atommagból álló mintának ennyi idő alatt bomlik el a fele.

a.) Mennyi az élettartam eloszlásának λ paramétere (rátája)

- i.) ha az időt években mérjük?
- ii.) ha az időt másodpercben mérjük?

- b.) Veszünk egyetlenegy ^{14}C magot. Mennyi a valószínűsége, hogy egy másodpercen belül elbomlik? És hogy két másodpercen belül? És hogy 3 másodpercen belül? (*Figyelem: nem csak képleteket kérek, hanem konkrét számokat!*)
- c.) Veszünk egy ezermilliárd (vagyis 10^{12}) magból álló mintát, és X -szel jelöljük a 3 másodperc alatt bekövetkező bomlások számát. Mennyi a $\mathbb{P}(X = 12)$ valószínűség? (*Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!*)
- d.) A 10^{12} magból álló minta bomlásait egy detektorral figyeljük, ami csak a bomlások egy részét észleli: minden bomlást a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel. Legyen Y a 3 másodperc alatt észlelt bomlások száma. Mennyi a $\mathbb{P}(Y = 3)$ valószínűség? (*Figyelem: nem csak képletet kérek, hanem egy konkrét számot!*)
- e.) Legyen T a detektor által észlelt első bomlás időpontja (másodpercben). Mi T eloszlása?

Megoldás:

- a.) Jelöljük ξ -vel az (egyetlen) atommag élettartamát, F -fel ennek eloszlásfüggvényét, $T_{1/2}$ -vel a felezési időt, vagyis $T_{1/2} = 5730\text{év} \approx 1.8 \cdot 10^{11}\text{s}$. Az exponenciális eloszlás definíciója szerint $x \geq 0$ -ra

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

a felezési idő definíciója szerint pedig

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi < T_{1/2}) = F(T_{1/2}) = 1 - e^{-\lambda T_{1/2}},$$

amiből

$$\lambda = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11}\text{s}}$$

- i.) $\lambda = \frac{0.693}{5730\text{év}} \approx 1.21 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{év}}$, vagyis ha az időt években mérjük, akkor $\lambda \approx 1.21 \cdot 10^{-4}$.
- ii.) $\lambda \approx \frac{0.693}{1.8 \cdot 10^{11}\text{s}} \approx 3.83 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\text{s}}$, vagyis ha az időt másodpercben mérjük, akkor $\lambda \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$.
- b.) Mérjük az időt másodpercben!
- i.) 1 másodpercen belül: Az eltelt idő $t = 1$.

$$\mathbb{P}(\xi < t) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \approx 3.83 \cdot 10^{-12}$$

Hát persze: Mivel λt nagyon kicsi, $e^{-\lambda t}$ -t nagyon jól közelíti az elsőfokú Taylor polinomja: $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t$, vagyis $F(t) \approx \lambda t$. Éppen ezért hívják λ -t az exponenciális eloszlás rátájának.

(Alternatív érvelés: mivel λt kicsi, a ξ élettartam $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ (ha $x > 0$) sűrűségfüggvénye jó közelítéssel konstans a $[0, t]$ intervallumon, így $\mathbb{P}(\xi < t) = \int_0^t f(x) dx \approx f(0)(t - 0) = \lambda t$.)

- ii.) Hasonlóan 2 és 3 másodpercre:

$$\mathbb{P}(\xi < 2) \approx 2\lambda \approx 7.66 \cdot 10^{-12}$$

$$\mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$$

- c.) Szigorúan véve X binomiális eloszlású $n = 10^{12}$ és $p = \mathbb{P}(\xi < 3) \approx 3\lambda \approx 1.15 \cdot 10^{-11}$ paraméterekkel, így

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 12) &= \binom{n}{12} p^{12} (1-p)^{n-12} \\ &\approx \binom{1000000000000}{12} (1.15 \cdot 10^{-11})^{12} (1 - 1.15 \cdot 10^{-11})^{999999999988}. \end{aligned}$$

Ezt az én számológémem nem is bírja kiszámolni, ezért Poisson eloszlással közelítünk: mivel n nagy és p kicsi, jó közelítéssel X Poisson eloszlású $np \approx 11.5$ paraméterrel. Vagyis

$$\mathbb{P}(X = 12) \approx e^{-11.5} \frac{11.5^{12}}{12!} \approx 0.113 = 11.3\%$$

- d.) Y a fenti, Poisson eloszlással modellezhető X ritkítása, így maga is (jó közelítéssel) Poisson eloszlású $\frac{np}{4} \approx 2.875$ paraméterrel. Így

$$\mathbb{P}(Y = 3) \approx e^{-2.875} \frac{2.875^3}{3!} \approx 0.223 = 22.3\%$$

- e.) Mivel az anyag másodperces időskálán nézve nagyon lassan fogy el, rövid ideig nyugodtan úgy tekinthetjük, hogy az észlelések Poisson folyamat szerint történnek. (Hosszú időre ez persze nem igaz, 5730 év alatt például a felére csökken az aktivitás (vagyis a ráta).) Mivel a bomlások rátája $n\lambda$, az észlelések rátája $\frac{n\lambda}{4} \approx 0.96$. Így az első észlelésig eltelt T idő (nagyon jó közelítéssel) exponenciális eloszlású 0.96 paraméterrel.

5.7 Jancsi és Juliska házában a vezetékes telefon Poisson folyamat szerint csörög, két óránként átlagosan egyszer.

- a.) Mennyi a valószínűsége, hogy az esti filmet, ami reklámokkal együtt két és fél óra hosszú, végignézzhetik a nélkül, hogy csörögne a telefon?
 b.) Mennyi a valószínűsége, hogy az első telefonhívásra a film kezdetétől számítva kevesebb, mint fél órát kell várni?
 c.) Mivel filmnézés közben nem szeretnek telefonálni, minden csörgésnél érmedobással döntenek, hogy melyikük vegye fel. Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsinak így is 1-nél többször kell a film alatt telefonálnia?

Megoldás: Az időt mérjük órában. Így a csörgések Poisson folyamatának rátája $\frac{1}{2}$. Legyen X_t a film kezdetétől számítva t idő alatt a csörgések száma, T pedig az első csörgésig eltelt idő. Tudjuk, hogy $X_t \sim Poi(t \cdot \lambda)$, de azt is, hogy $T \sim Exp(\lambda)$.

- a.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{2.5} = 0) = \mathbb{P}(Poi(2.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = e^{-1.25} \frac{1.25^0}{0!} = e^{-1.25} \approx 0.287$. **2. megoldás:** $\mathbb{P}(T > 2.5) = 1 - \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 2.5) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 2.5}) = e^{-1.25} \approx 0.287$.
 b.) **1. megoldás:** $\mathbb{P}(X_{0.5} > 0) = 1 - \mathbb{P}(Poi(0.5 \cdot \frac{1}{2}) = 0) = 1 - e^{-0.25} \frac{0.25^0}{0!} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$. **2. megoldás:** $\mathbb{P}(T < 0.5) = \mathbb{P}(Exp(\frac{1}{2}) < 0.5) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot 0.5} = 1 - e^{-0.25} \approx 0.221$.
 c.) **1. megoldás:** Poisson folyamat ritkítása is Poisson folyamat: ha csak a Jancsi által felvett hívásokat nézzük, azok is Poisson folyamatot alkotnak, csak a ráta ezúttal $\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

mivel óránként átlag $\frac{1}{4}$ hívást vesz fel. Így, ha $Y_{2.5}$ a Jancsi által 2.5 óra alatt felvett hívások száma, akkor $Y_{2.5} \sim Poi(2.5 \cdot \mu) = Poi(0.625)$. Így

$$\mathbb{P}(Y_{2.5} > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 0) - \mathbb{P}(Y_{2.5} = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

2. megoldás: Legyen $X = X_{2.5}$ a telefoncsörgések teljes száma, $X \sim Poi(\rho)$ ahol $\rho = 1.25$, és legyen Y a Jancsi által felvett telefonok száma. Az $X = n$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása binomiális, és pedig $(n, p = \frac{1}{2})$ paraméterekkel. Vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel $n = 0, 1, 2, \dots$ -re

$$\mathbb{P}(Y = k | X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{ha } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{ha } k > n, \text{ persze} \end{cases}$$

Ebből a teljes valószínűség tétele szerint minden $k = 0, 1, 2, \dots$ -re

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) \mathbb{P}(Y = k | X = n) = \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Ez az összeg szerencsére kiszámolható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ -t kiírva $n!$ kiesik, utána pedig kézenfekvő az $l := n - k$ jelölés, ha már n úgy is csak k -tól fut:

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\rho} \rho^{l+k} \frac{1}{k!l!} p^k q^l = e^{-\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q\rho)^l}{l!}.$$

Az utolsó szumma kedves ismerősünk, mivel $e^x = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^l}{l!}$. Így

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!} e^{q\rho} = e^{-p\rho} \frac{(p\rho)^k}{k!}.$$

Vagyis sikerült kézzel bebizonyítanunk, hogy Poisson eloszlás ritkítása is Poisson eloszlás, és pedig $Y \sim Poi(p\rho)$.

Innen pedig, mivel $p\rho = \frac{1}{2} \cdot 1.25 = 0.625$,

$$\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - e^{-0.625}(1 + 0.625) \approx 0.130$$

5.8 Egy számítógépes hálózati kiszolgálóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az igények, percenként átlagosan tíz. Minden igény kiszolgálása során $\frac{1}{10}$ valószínűséggel történik valamilyen hiba, az előzményektől függetlenül.

- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt (mondjuk 08:00-tól 08:01-ig) 5-nél kevesebb igény érkezik?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 09:00-ig pontosan 2 hiba történik?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy 08:00-tól 08:01-ig legalább 5 igény érkezik, de egy hiba sem történik? (*Vigyázat: Az igények száma és a hibák száma nem független! Tipp: a hibát nem okozó igények száma viszont független a hibák számától. Miért is?*)

Megoldás:

a.) Legyen $X_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező igények száma, és mérjük az időt 08:00-tól kezdve percben. Mivel percenként átlagosan tíz igény érkezik, a Poisson folyamat rátája $\lambda_X = 10$, így $a = 0$, $b = 1$ választással $X_{[0;1]} \sim Poi((b-a)\lambda_X) = Poi(10)$. (Persze: az egy perc alatt érkező igények száma Poisson eloszlású, várható értéke pedig 10.) Így annak a valószínűsége, hogy egy perc alatt 5-nél kevesebb igény érkezik,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[0;1]} < 5) &= \sum_{k=0}^4 \mathbb{P}(X_{[0;1]} = k) = \sum_{k=0}^4 e^{-10} \frac{10^k}{k!} = \\ &= e^{-10} \left(1 + 10 + \frac{10^2}{2} + \frac{10^3}{6} + \frac{10^4}{24} \right) \approx 0.02925 \end{aligned}$$

b.) Legyen $Y_{[a;b]}$ az a és b időpont között történő hibák száma. Mivel az egyes igények az előzményektől függetlenül azonos valószínűséggel okoznak hibát, a hibák is Poisson folyamatot alkotnak (ami az igények Poisson folyamatának ritkítése), ennek rátája $\lambda_Y = \frac{1}{10} \cdot 10 = 1$. (Persze: percenként átlag 1 hiba történik.) Így $Y_{[0;60]} \sim Poi((60-0)\lambda_Y) = Poi(60)$, amiből

$$\mathbb{P}(Y_{[0;60]} = 2) = e^{-60} \frac{60^2}{2!} \approx 1.576 \cdot 10^{-23}$$

c.) Legyen $Z_{[a;b]}$ az a és b időpont között érkező, *hibát nem okozó* igények száma. Így az Y és a Z Poisson folyamatok egyaránt az X ritkításai, amik ráadásul diszjunktak: ha egy igény az egyik folyamatban szerepel, akkor a másikban nem. Az ilyenekről tudjuk előadásról, hogy *egymástól* függetlenek (de persze az X folyamattól nem). Így

$$Y_{[0;1]} \sim Poi\left((1-0)\frac{1}{10} \cdot 10\right) = Poi(1) \quad , \quad Z_{[0;1]} \sim Poi\left((1-0)\frac{9}{10} \cdot 10\right) = Poi(9)$$

a kérdés pedig $\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5 \text{ és } Y_{[0;1]} = 0)$. Ennek a számolásakor az Y és Z függetlenségét úgy tudjuk kihasználni, hogy

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) \cdot \mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0).$$

Az első tényező

$$\mathbb{P}(Z_{[0;1]} \geq 5) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-9} \frac{9^k}{k!} = 1 - e^{-9} \left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24} \right),$$

a második pedig

$$\mathbb{P}(Y_{[0;1]} = 0) = e^{-1} \frac{1^0}{0!} = e^{-1}.$$

Ezt összerakva

$$\mathbb{P}(X_{[0;1]} \geq 5, Y_{[0;1]} = 0) = \left[1 - e^{-9} \left(1 + 9 + \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{6} + \frac{9^4}{24} \right) \right] e^{-1} \approx 0.3477$$

5.9 A postafiókomba az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek (éjjel-nappal egyenletesen), naponként átlagosan 24. Minden email a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel spam; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem spam, de nincs is vele teendő; a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel viszont azt eredményezi, hogy valamit csinálni kell.

- a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggel 8-tól 10 óráig 4-nél több emailt kapok?
- b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 3 olyan email érkezik, amivel teendő lesz?
- c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 5 email érkezik, de spam egy se? (*Vigyázat: Az emailek száma és a spamek száma nem független! Tipp: a spamek száma viszont független a többi email számától. Miért is?*)

Megoldás:

- a.) Legyen $X_{[8,10]}$ a reggel 8 és 10 között érkező emailek száma. Mivel az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek, $X_{[8,10]}$ Poisson eloszlású. Várható értéke 2, mivel óránként átlag 1 email érkezik. Vagyis $X_{[8,10]} \sim Poi(2)$, vagyis $\mathbb{P}(X_{[8,10]} = k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ -re. Ebből

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{[8,10]} > 4) &= 1 - [\mathbb{P}(X_{[8,10]} = 0) + \mathbb{P}(X_{[8,10]} = 1) + \dots + \mathbb{P}(X_{[8,10]} = 4)] = \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} \right) = \\ &= 1 - e^{-2} \left(1 + 2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} \right) = 1 - 7e^{-2} \approx 0.053 = 5.3\%. \end{aligned}$$

- b.) Legyen $Y_{[8,10]}$ a reggel 8 és 10 között érkező olyan emailek száma, amivel teendő lesz. Az ilyen emailek folyamata az összes email Poisson-folyamatának ritkítása $p = \frac{1}{4}$ -szeresére, így maga is Poisson-folyamat, negyedakkora rátával. Ezért $Y_{[8,10]} \sim Poi\left(\frac{1}{2}\right)$, vagyis $\mathbb{P}(Y_{[8,10]} = k) = e^{-\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ -re. Ebből

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{[8,10]} \geq 3) &= 1 - [\mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 0) + \mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 1) + \mathbb{P}(Y_{[8,10]} = 2)] = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} \right) = \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 1 - \frac{13}{8} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.014 = 1.4\%. \end{aligned}$$

- c.) Tekintsük külön a spamek folyamatát és a *nem spam* emailek folyamatát. Mindkettő az összes email Poisson-folyamatának ritkítása, *sőt*: az egyik egy ritkítás során megmaradó eseményekből áll, a másik pedig az ugyanezen ritkítás során kidobott eseményekből. Előadásról tudjuk, hogy ezek nem csak külön-külön Poisson folyamatok, hanem *függetlenek is*.

Hogy kicsit kevesebb legyen a jelölés, mint az előző két pontban, nem írok több indexet... Legyen Z a reggel 8 és 10 között érkező *nem spam* emailek száma, V pedig a reggel 8 és 10 között érkező spamek száma. A fentiek szerint $Z \sim Poi\left(\frac{3}{2}\right)$, $V \sim Poi\left(\frac{1}{2}\right)$ és függetlenek, vagyis

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \geq 5, V = 0) &= \mathbb{P}(Z \geq 5)\mathbb{P}(V = 0) = \\ &= \left[1 - e^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{1}{24} \left(\frac{3}{2}\right)^4 \right) \right] e^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.011 = 1.1\%. \end{aligned}$$

5.10 Egy internetes kiszolgálóhoz percnként átlagosan 10 kérés érkezik, Poisson folyamat szerint. Minden kérés a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás.

- a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:02 között nem érkezik hibás kérés?
- b.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között pontosan 20 kérés érkezett (összesen), mennyi a valószínűsége, hogy ezek egyike sem hibás?
- c.) Feltéve, hogy 10:00 és 10:02 között legalább 18 hibátlan kérés érkezett, mennyi a valószínűsége, hogy hibás viszont egy sem?

Megoldás:

- a.) Legyen X a 10:00 és 10:02 között érkező hibás kérések száma. A hibás kérések folyamata az összes kérés Poisson-folyamatának ritkítása, így maga is Poisson folyamat. Mivel két perc alatt átlag két hibás kérés érkezik, $\mathbb{E}X = 2$, vagyis $X \sim Poi(2)$. Így $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2} \frac{2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0.135$
- b.) Mivel a 20 kérés mindegyike a többitől függetlenül $\frac{1}{10}$ valószínűséggel hibás,

$$\mathbb{P}(\text{egyik sem hibás}) = \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20} \approx 0.122$$

(Alternatív megoldás: azon feltétel mellett, hogy összesen 20 kérés érkezett, a hibás kérések száma binomiális eloszlású $n = 20$, $p = \frac{1}{10}$ paraméterekkel, és

$$\mathbb{P}\left(\text{Bin}\left(20; \frac{1}{10}\right) = 0\right) = \binom{20}{0} \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{10}\right)^{20-0} = \left(\frac{9}{10}\right)^{20}.$$

)

- c.) A hibás és a hibátlan kérések száma egymástól független, ezért a feltételes valószínűség megegyezik a feltétel nélküli valószínűséggel, amit az a.) pontban kiszámoltunk: $e^{-2} \approx 0.135$

6. Laplace-transzformáció

- 6.1 Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. A definíció alapján írjuk fel X Laplace transzformáltját! Ennek deriválásával számoljuk ki az $\mathbb{E}X$ várható értéket és a $\mathbb{V}arX$ szórásnégyzetet!
- 6.2 Az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $[a, b]$ intervallumon. Mi a Laplace-transzformáltja?
- 6.3 $X, Y \geq 0$ független valószínűségi változók, $Z = X + Y$, $X \sim Exp(1)$ és $Z \sim \Gamma(1, 1)$. Mi Y eloszlása?
- 6.4 Móricka éjjelente hullócsillagokat néz, és óránként átlagosan 4-et lát. Minden hullócsillag, a többitől függetlenül, véletlen ideig látszik. Ez a véletlen idő exponenciális eloszlású, $\frac{1}{10}$ s várható értékkel. Jelöljük X -szel azt az időt, ameddig Móricka 22:00 és 24:00 között hullócsillagot lát (másodpercben mérve).
- a.) Számoljuk ki X Laplace transzformáltját! (Jelölje L .)
- b.) Mennyi $L'(0)$?
- c.) Mennyi $L''(0)$?
- d.) Mennyi X szórásnégyzete?

(A precízek kedvéért: Elvileg előfordulhat, hogy egyszerre két hullócsillag is látszik, vagy hogy egy hullócsillag felvillanása csak részben esik 22:00 és 24:00 közé (pl. mert 22:00 előtt egy ezredmásodperccel kezdődik). Ezekről nagyvonalúan tekintsünk el.)

- 6.5 Pistike irodájában reggel 8-tól kezdve óránként átlag 3-szor csörög a telefon, Poisson-folyamat szerint. Pistike valamikor 8:00 és 9:00 között érkezik az irodába, egyenletes eloszlású véletlen időpontban (ami független a telefonhívásoktól). Mi a valószínűsége annak, hogy Pistike egyetlen hívásról sem marad le?

7. Folytonos idejű Markov láncok

- 7.1 Pistike az ablakból az utca forgalmát nézi. Személyautók és teherautók mennek arra, mindkettő Poisson-folyamat szerint: személyautóból percenként átlagosan 3, teherautóból percenként átlagosan 1. Pistike csak a teherautókat szereti. Jókedve 5-ös skálán változik (1 és 5 között): ha teherautót lát, 1-gyel felfelé ugrik (hacsak nem már előtte is 5-ös volt), ha pedig személyautót, akkor 1-gyel lefelé (hacsak nem már előtte is 1-es volt). Legyen $X(t)$ Pistike jókedve a t időpillanatban, $t \geq 0$.

- Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov láncsal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.
- Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását. (Szabad észrevenni, hogy X véges állapotterű születési-halálozási folyamat.)
- Pistike a nézelődést teljes jókedvvel kezdte. Egy óra elteltével arra jár az apukája. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistikét teljes rosszkedvben (vagyis 1-es állapotban) találja?
- Hosszú távon az idő hány százalékában lesz Pistikének 5-ös jókedve?
- Hosszú távon mennyi lesz Pistike jókedvének időátlaga?

Megoldás:

- a.) Az időt mérjük percben. Az állapottér $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotba lehet, és pedig felfelé 1 rátával (mert a teherautók 1 rátával jönnek, lefelé pedig 3 rátával, mert a személyautók 3 rátával jönnek. Persze az 1-ből csak felfelé, az 5-ből csak lefelé lehet ugrani. Így a generátor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

- b.) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_1 : \pi_2 = 3 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$, $\pi_3 : \pi_4 = 3 : 1$, $\pi_4 : \pi_5 = 3 : 1$. Összesítve $\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 : \pi_4 : \pi_5 = 81 : 27 : 9 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \left(\frac{81}{121} \quad \frac{27}{121} \quad \frac{9}{121} \quad \frac{3}{121} \quad \frac{1}{121} \right).$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $A^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

- c.) Egy óra hosszú idő, ezért a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_{60} = 1 | X_0 = 5) \approx \pi_1 = \frac{81}{121} \approx 69\%$.
- d.) Az ergodtétel értelmében az időátlag $\pi_5 = \frac{1}{121} \approx 0.8\%$.
- e.) A jókedv egy szám 1 és 5 között, egész pontosan t -kor a jókedv X_t . Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 1 \cdot \frac{81}{121} + 2 \cdot \frac{27}{121} + 3 \cdot \frac{9}{121} + 4 \cdot \frac{3}{121} + 5 \cdot \frac{1}{121} = \frac{179}{121} \approx 1.48.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

7.2 A Faláb FC focicsapatának 4 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 2 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje az egészséges csatárok számát a t időpontban X_t . Az időt mérjük hónapokban.

- a.) Modellezzük X_t -t folytonos idejű Markov-lánccal! Írjuk fel a generátort. *Legyünk észnél a rátákkal!*
- b.) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
- c.) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani? Miért?
- d.) Átlagosan hány csatárral játszanak? Miért?
- e.) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a következő 10 napban ez végig így marad (a 10 napot tekinthetjük 1/3 hónapnak).

Megoldás: Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Ha 0 csatár egészséges, persze nincs sérülés. Ha 1 egészséges (vagyis $X_t = 1$), akkor az az egy $\frac{1}{3}$ rátával sérül meg, vagyis $\lambda_{10} = \frac{1}{3}$. Ha 2 csatár egészséges, akkor mindkettő játszik is, így *valamelyikük* már $\lambda_{21} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ rátával sérül meg. Ha 3 vagy 4 csatár egészséges, akkor is csak kettő játszik, így a sérülés rátája ugyanennyi: $\lambda_{32} = \lambda_{43} = \frac{2}{3}$.

Ha minden csatár egészséges, akkor persze egy se tud meggyógyulni. A pontosan 1 sérült (vagyis $X_t = 3$), akkor azaz egy 1 rátával épül fel, vagyis $\lambda_{34} = 1$. Ha 2 sérült, akkor mindkettő lábadozik, így *valamelyikük* már $\lambda_{23} = 2 \cdot 1 = 2$ rátával épül fel. Ugyanígy, ha 3 sérült, akkor mindhárom lábadozik, ezért $\lambda_{12} = 3$, és ha mind a 4 sérült, akkor mind a négy lábadozik, így $\lambda_01 = 4$.

Mivel egy valószínűséggel egyszerre csak egy csatár tud megsérülni vagy felépülni (a folytonos Markov modell szerint), az összes többi (nem szomszédos állapotok közötti) ugrási ráta 0.

a.) Így az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -10/3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -8/3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & -5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

(A főátlón kívülre az ugrási rátákat írjuk, a főátlóba meg annyit, hogy minden sorösszeg nulla legyen.)

b.) A $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_4)$ stacionárius eloszlás kiszámításához vagy megoldjuk a $G^T \pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszerrel azzal a kiegészítő feltétellel, hogy $\pi_0 + \dots + \pi_4 = 1$, vagy kihasználjuk, hogy X_t születési-halálozási folyamat, amiből szomszédos i, j állapotokra $\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{\lambda_{ji}}{\lambda_{ij}}$. Mindkettőből az jön ki, hogy

$$\begin{aligned} \pi &= c \cdot (1 \quad 12 \quad 54 \quad 162 \quad 243) = \left(\frac{1}{472} \quad \frac{12}{472} \quad \frac{54}{472} \quad \frac{162}{472} \quad \frac{243}{472} \right) \\ &\approx (0.002 \quad 0.025 \quad 0.114 \quad 0.343 \quad 0.515). \end{aligned}$$

c.) A 0 állapotban eltöltött időnek a teljes időhöz mért aránya nem egyéb, mint $f(X_t)$ időátlag, ahol $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a 0 állapot indikátora: oszlopvektor formájában $f = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Mivel a Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint ez az időátlag tart $\pi f = \pi_0 \approx 0.002$, vagyis a Faláb FC hosszú távon az idő kb. 2 ezrelékében játszik csatár nélkül.

d.) A játzó csatárok számát az állapot függvényében a $g = (0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2)^T$ függvény adja meg. Ennek időátlagos hosszú távon - ismét az ergodtétel miatt $\pi g = \pi_1 + 2 \cdot (\pi_2 + \pi_3 + \pi_4) \approx 1.97$.

e.) A 4 állapotból való elugrás rátája $\frac{2}{3}$, így annak valószínűsége, hogy $t = \frac{1}{3}$ ideig nem történik ugrás, pontosan annak valószínűsége, hogy egy $\lambda = \frac{2}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlás $t = \frac{1}{3}$ -nál nagyobb értéket vesz fel, vagyis $1 - F_{\lambda=\frac{2}{3}}(\frac{1}{3}) = e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}} = e^{-\frac{2}{9}} \approx 0.80$.

7.3 Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár”, illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel”.

Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov láncsal. Az időt mérjük percben.

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldolgozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?

Megoldás: Az állapotokat jelöljük számokkal: legyen $S = \{0, 1\}$ ahol 0 a passzív, 1 pedig az aktív állapot. Jelöljük a rendszer állapotát t idő elteltével X_t -vel. Mivel csak két állapot van, ugrani persze 0-ból csak 1-be, 1-ből pedig csak 0-ba lehet.

- a.) Az 1-ből 0-ba ugrás rátája $\lambda_{10} = 60$, mert a feldolgozással eltöltött idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_{10}} = \frac{1}{60}$. A 0-ből 1-be ugrás rátája $\lambda_{01} = 2$, mert ilyen rátájú Poisson folyamat szerint érkeznek a jelek. Ezek a λ_{ij} -k lesznek a G infinitezimális generátor főátlón kívüli elemei. A főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Így

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 60 & -60 \end{pmatrix}.$$

- b.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével az egyes állapotok valószínűségei tartanak a (z egyetlen) stacionárius eloszlás szerinti súlyokhoz. 10 óra azaz 600 perc pedig (ilyen ráták mellett) hosszú idő. Ezért keressük a $\pi = (\pi_0 \ \pi_1)$ stacionárius eloszlást a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával:

$$\begin{pmatrix} -2 & 60 \\ 2 & -60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avagy a lineáris algebrában szokásos tömör jelöléssel

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 60 & 0 \\ 2 & -60 & 0 \end{array} \right).$$

A két egyenlet egymásnak -1 -szerese, így elég mondjuk az elsőt nézni: $-2\pi_0 + 60\pi_1 = 0$, amiből $\pi_0 = 30\pi_1$. Például $\pi_1 = 1$ választással is megkapjuk az egyenletrendszer egy lehetséges megoldását: $\tilde{\pi} = (30 \ 1)$. A keresett stacionárius eloszlás ennek olyan konstansszorosa, amiben az elemek összege 1:

$$\pi = \left(\frac{30}{31} \quad \frac{1}{31} \right).$$

A Markov láncok alaptétele szerint tehát $\mathbb{P}(X_{600} = 1) \approx \pi_1 = \frac{1}{31} \approx 0.0323$.

- c.) A pillanatnyi teljesítményfelvétel a t időpontban $f(X_t)$, ahol az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ megfigyelhető mennyiség olyan, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = 10$. Ezt célszerű oszlopvektorként írni:

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében $f(X_t)$ időátlagos hosszú távon (1 valószínűséggel) tart az egyetlen π stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \left(\frac{30}{31} \quad \frac{1}{31} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{30}{31} \cdot 1 + \frac{1}{31} \cdot 10 = \frac{40}{31} \approx 1.29.$$

- 7.4 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy három állapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov lánc Q átmenet-valószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Már az időt órában méri.)

- Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.
- Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.
- Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?
- Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?

Megoldás:

- Az egyes állapotokban a tartózkodási idők a feladat szövege szerint exponenciálisak, ahogy annak egy folytonos idejű Markov láncban lenni kell. Ezek paraméterei (rátái) éppen a tartózkodási idő paraméter vektort adják: $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (8, 1, 5)$. Ezek a ráták kerülnek negatív előjellel a G infinitezimális generátor főátlójába. A főátlón kívüli elemekre $G_{ij} = \lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. Ezeket mind beírva

$$G = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 0 \\ 0.8 & -1 & 0.2 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

- Meg kell oldani a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. A lineáris algebrában szokásos mátrixjelöléssel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 8 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array} \right)^{2. \text{ sor} + = 1. \text{ sor}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0.8 & 4 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \\ 0 & 0.2 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim$$

Az utolsó egyenlet elhagyható, mert azonos a másodikkal. Az elsőhöz hozzáadjuk a másodikat 4-szer, majd mindkét sort leosztjuk a főátlóbeli elem abszolút értékével:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -8 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & -0.2 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 25 & 0 \end{array} \right).$$

Vagyis $\pi_1 = 3\pi_3$ és $\pi_2 = 25\pi_3$, amiből az egyenletrendszer egy lehetséges megoldása $\bar{\pi} = (3, 25, 1)$. Ezt lenormálva (hogy az elemek összege 1 legyen)

$$\pi = \left(\frac{3}{29}, \frac{25}{29}, \frac{1}{29} \right).$$

- Legyen $S = \{1, 2, 3\}$ az állapottér. Az, hogy az 1-es állapotban eltöltött idő az összes időnek hányad része, az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

megfigyelhető mennyiség időátlaga. Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint az időátlag hosszú távon (1 valószínűséggel) megegyezik a stacionárius eloszlás szerinti átlaggal, vagyis $\pi \cdot f = \pi_1 = \frac{3}{29}$. Hasonlóan hosszú távon a 2-es állapotban az idő $\pi_2 = \frac{25}{29}$, a 3-asban pedig $\pi_3 = \frac{1}{29}$ hányadát tölti.

d.) Ezúttal először a $g : S \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

függvény időátlagát keressük. Megint csak az ergodtétel értelmében az időátlag hosszú távon egy valószínűséggel $\pi \cdot g = 100\pi_1 + 5\pi_2 + 20\pi_3 = \frac{445}{29}$ (hajszál/óra). Négy hét az $4 \cdot 7 \cdot 24 = 672$ óra, vagyis Mari ezalatt körülbelül $672 \cdot \frac{445}{29} \approx 10312$ hajszálát veszít.

7.5 Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

- Modellezzük X_t -t folytonos idejű Markov láncsal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)
- Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.
- Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?
- Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?
- A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:

X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

a.) Az állapotter $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

b.) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \left(\frac{6}{16} \quad \frac{6}{16} \quad \frac{3}{16} \quad \frac{1}{16} \right).$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right).$$

c.) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk:
 $\mathbb{P}(X_t = 0 | X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

d.) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i \in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

e.) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$ -ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$ -át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$ -oda nem parkol le.

7.6 Egy béka fel-le ugrol egy 4-fokú lépcsőn, ahol a legalsó szint a 0, a legfelső pedig az 4, így a béka 5 különböző helyen (vagyis szinten) lehet. A béka exponenciális eloszlású véletlen ideig vár 10 másodperc várható értékkel, majd feldob egy dobókockát. Ha az eredmény 5 vagy 6, akkor ugrik egyet felfelé, kivéve, ha már legfelül van (mert akkor nem ugrik sehova). Ha a dobás eredménye 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé ugrik egyet, kivéve, ha már legalul van (mert akkor nem ugrik sehova). Ez után a béka ugyanezt ismételgeti, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a béka az 1-es szinten van. Legyen $Y(t)$ a béka helye t idő elteltével. Az időt mérjük *percben*.

a.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc állapotterét, tartózkodási idő paraméter vektorát és kezdeti eloszlás vektorát! (*Vigyázat: a szélső állapotokban sem lehet helyben ugrani, csak tovább várn!*)

b.) Írjuk fel a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát!

c.) Írjuk fel az $Y(t)$ Markov lánc ráta-mátrixát és infinitezimális generátorát!

d.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját!

e.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a béka 1 másodperc elteltével a 2-es szinten lesz?

f.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait! Szabad kihasználni, hogy $Y(t)$ születési-halálozási folyamat.

g.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc elteltével a béka legfelül lesz? Miért?

h.) Mennyi lesz a béka helyének időátlaga hosszú távon? Miért?

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. A közbülső állapotokból (1, 2, 3) az elugrás rátája 6, mivel a várható tartózkodási idő $\frac{1}{6}$ perc. Legalul, a 0 állapotban viszont csak ennek $\frac{1}{3}$ -a, mert nem elég, hogy csörög az óra, hanem még 5-öst vagy 6-ost is kell dobni, aminek a valószínűsége $\frac{1}{3}$. Úgyanígy legfelül, a 4 állapotban az elugrási ráta $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Vagyis a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = (2 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 4).$$

A kezdeti eloszlás vektor $\pi(0) = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

- b.) 0-ból csak 1-be lehet ugrani, 4-ből csak 3-ba. A többi állapotból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel ugrunk fel és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel le. Így a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c.) A $\underline{\lambda}$ ráta-mátrix főátlójában nincs semmi, a többi eleme $\lambda_{ij} = \lambda_i Q_{ij}$. A G infinitezimális generátor ugyanez, csak a főátlója úgy van kitöltve, hogy minden sorösszeg 0 legyen, vagyis

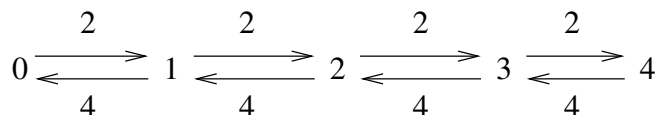
$$G_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij} & \text{ha } i \neq j \\ -\lambda_i & \text{ha } i = j \end{cases}.$$

Esetünkben

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hát persze: a lefelé ugrás rátája mindig 4, mert egy óracsörgés és egy 1 és 4 közötti dobás kell hozzá (kivéve legalul); a felfelé ugrás rátája pedig mindig 2, mert egy óracsörgés és egy 5-ös vagy 6-os dobás kell hozzá (kivéve legfelül).

- d.) A gráf-reprezentáció:



- e.) $t = \frac{1}{60}$ rövid idő, ezért a t idejű átmenetmátrix $P(t) \approx P(0) + tP'(0) = I + tG$. Ezen belül $P_{12}(t) \approx 0 + t\lambda_{12} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$. Vagyis

$$\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{60}\right) = 2 \mid X(0) = 1\right) \approx \frac{1}{30}.$$

- f.) Folytonos idejű születési-halálozási folyamatban minden i -re $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$. Ebből esetünkben $\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\pi_3}{\pi_4} = 2$; Ebből $\pi_4 = 1$ választással $\tilde{\pi} = (16; 8; 4; 2; 1)$. Ezt lenormálva kapjuk az (egyetlen) stacionárius eloszlást:

$$\pi = \pi^{(Y)} = \left(\frac{16}{31} \quad \frac{8}{31} \quad \frac{4}{31} \quad \frac{2}{31} \quad \frac{1}{31}\right).$$

- g.) $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű, irreducibilis és folytonos idejű. Ezért a Markov láncok alaptétele szerint

$$\mathbb{P}(X(t) = 4 \mid X(0) = 1) \approx \pi_4 = \frac{1}{31}.$$

h.) A béka helye az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol $f(i) = i$, vagyis vektor-formában $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. A

Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon 1 valószínűséggel

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(X_n) &= \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f \\ &= \frac{16 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{31} = \frac{26}{31} \approx 0.84 \end{aligned}$$

7.7 Egy lépcsőházban 3 villanykörte van, és folyamatosan égnek – ha csak nincsenek éppen kiégve. Az egyes villanykörtek élettartama független és exponenciális eloszlású, 1 év várható értékkel. A lépcsőházban évente átlag kétszer megjelenik a gondnok (Poisson folyamat szerint), és az összes kiégett körtét újra cseréli. Jelöljük $X(t)$ -vel a t idő elteltével működő körtek számát. Az időt mérjük években.

- Adjuk meg az $X(t)$ Markov lánc állapotterét és az átmenetrátákat (ráta-mátrixot). (*Vigyázat: ha éppen 2 körte működik, milyen rátával ég ki közülük valamelyik?*)
- Írjuk fel az infinitezimális generátort!
- Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy holnap délben mind működni fog?
- Tegnap délben pont 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy pont 20 évvel később mind működni fog?
- A lépcsőházban akkor van zavaróan sötét, ha legfeljebb 1 körte világít. Hosszú távon az idő hány százalékában van zavaróan sötét?

Megoldás:

- Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Ha egy körte ég, annak kiegészi rátája a várható élettartam reciproka, esetünkben $1/1 = 1$, vagyis az 1 állapotból a 0 állapotba $\lambda_{10} = 1$ rátával ugrik a rendszer. Ha 2 körte ég, akkor már $1 + 1 = 2$ rátával fog kiégni valamelyik, így $\lambda_{21} = 2$. Ugyanígy $\lambda_{32} = 3$. A gondnok látogatásainak rátája 2, így a 0, 1 és 2 állapotból is $\lambda_{03} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 2$ rátával ugrik a rendszer 3-ba. (Ha a rendszer éppen a 3 állapotban van és jön a gondnok, akkor nem történik semmi.) Más átmenet nem lehetséges, így a ráta-mátrix

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 2 \\ 1 & * & 0 & 2 \\ 0 & 2 & * & 2 \\ 0 & 0 & 3 & * \end{pmatrix}.$$

(Ennek a főátlójában nincs semmi, mert helyben ugrás nincs.)

- Az infinitezimális generátort úgy kapjuk, hogy a $\underline{\lambda}$ főátlóját kitöltjük úgy, hogy minden sorösszeg nulla legyen:

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

c.) Legyen tegnap délben a $t = 0$ időpont. Így a kérdés

$$\mathbb{P}(X(\Delta t) = 3 \mid X(0) = 2) = P_{23}(\Delta t) = ?$$

ahol $\Delta(t) = \frac{2}{365}$, mert az időt években mérjük, és $P(t)$ a t idejű átmenetmátrix. Mivel Δt kicsi (a rendszerbeli tipikus várakozási időkhöz képest), $P(\Delta t) \approx P(0) + \Delta t P'(0) = I + \Delta t G$, ahol I az egységmátrix. Vagyis

$$P_{23}(\Delta t) \approx I_{23} + \frac{2}{365} G_{23} = 0 + \frac{2}{365} \cdot 2 = \frac{4}{365} \approx 0.01 = 1\%.$$

(Más szóval: Két nap alatt a $2 \rightarrow 3$ átmenet valószínűsége első közelítésben megegyezik annak valószínűségével, hogy a két nap alatt jön a gondnok, mert már ennek is elég kicsi a valószínűsége – annak meg, hogy több esemény is történik, még sokkal kisebb. A gondnok látogatásának valószínűsége pedig rövid idő alatt ráta \cdot idő.

d.) A kérdés most is

$$\mathbb{P}(X(t) = 3 \mid X(0) = 2) = P_{23}(t) = ?$$

de ezúttal $t = 20$ hosszú idő. A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis (valamint folytonos idejű, így periodikus nem lehet), ezért a Markov láncok alaptétele szerint a $\mathbb{P}(X(t) = 3)$ valószínűséget a stacionárius eloszlás szerinti π_3 valószínűséggel közelíthetjük (a kiinduló állapottól függetlenül), ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Ennek kereséséhez a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3/4 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Ezt kiolvastva $\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1$, $\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_2$, $\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_4$, vagyis pl. $\pi_3 = 4$ választással kapjuk, hogy egy megoldás a $\tilde{\pi} = (1, 2, 3, 4)$ vektor, és persze megoldás ennek minden számszorosa is. Minket az egyetlen normált megoldás érdekel (amire $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$), vagyis

$$\pi = \frac{1}{10} \tilde{\pi} = \left(\frac{1}{10} \quad \frac{2}{10} \quad \frac{3}{10} \quad \frac{4}{10} \right).$$

Így a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}(X(20) = 3 \mid X(0) = 2) \approx \pi_3 = \frac{3}{10}.$$

e.) Legyen $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ a „zavaróan sötét van” esemény indikátora, vagyis $f(0) = f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = 0$. Vektor-jelöléssel

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így a $t \in [0, T]$ időtartam alatt a 0 és 1 állapotok valamelyikében eltöltött idő $\int_0^T f(X(t)) dt$, a kérdés pedig, hogy az idő hány százalékát tölti a rendszer a 0 és 1 állapotok valamelyikében, az $f(X(t))$ időátlaga:

$$\overline{f(X)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t)) dt = ?$$

A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, ezért az ergodtétel szerint egy valószínűséggel

$$\overline{f(X)} = \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f,$$

ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. Esetünkben

$$\overline{f(X)} = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{10}.$$

7.8 Egy fagyis bácsi előtt gyerekek állnak sorba. Ő minden sorra kerülő gyereket exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgál ki, fél perc várható értékkel, az előzményektől és a sorban állók számától függetlenül. A gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1, a múlttól és a sor hosszától függetlenül. Kivétel, ha a sorban már 3 gyerek áll, mert akkor több nem állhat be (az apukája elvonszolja). Jelölje $X(t)$ a sorban állók számát t idő elteltével. Az időt mérjük percben. Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov láncsal.

- Mi a Markov lánc állapottere?
- Rajzoljuk fel a Markov lánc gráf-reprezentációját – vagyis a lehetséges átmenetek irányított gráfját az egyes átmenetek rátáival.
- Írjuk fel a Markov lánc ráta-mátrixát.
- Írjuk fel a Markov lánc tartózkodási idő paraméter vektorát.
- Ha a sor hossza éppen 2, várhatóan mennyi idő múlva fog megváltozni?
- Ha a sor hossza éppen 2, mennyi a valószínűsége, hogy a következő állapot a 3 lesz?
- Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát.
- Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.
- Ha a sor $t = 0$ -kor üres, közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 2 óra elteltével 3 lesz a hossza?
- Az idő hány százalékát tölti a fagyis bácsi tétlenül (mert üres a sor) hosszú távon?

Megoldás:

- A sorban állók száma 0,1,2 vagy 3 lehet, így az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3\}$.
- Egyszerre csak egy gyerek mehet el, és csak egy érkezik, így ugrani minden állapotból csak szomszédos állapotokba lehet. A felfelé ugrás rátája mindig a gyerekek érkezési folyamatának rátája, vagyis 1 (mert percenként átlag 1 gyerek érkezik). A lefelé ugrás rátája pedig a kiszolgálás rátája, vagyis 2, mert a bácsi percenként átlag 2 gyereket szolgál ki. *FONTOS, hogy a ráta, ami 2, nem egyenlő a kiszolgálási idő várható értékével, ami $\frac{1}{2}$, hanem annak a reciproka.* Így a gráf-reprezentáció

$$0 \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 3$$

c.) Ez alapján a ráta-mátrix

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ 2 & * & 1 & 0 \\ 0 & 2 & * & 1 \\ 0 & 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

d.) A tartózkodási idő paraméter vektor a ráta-mátrix sorösszegeiből áll, vagy más szóval az egyes állapotokból való elugrás rátáiból:

$$\underline{\lambda} = (1 \quad 3 \quad 3 \quad 2).$$

e.) A 2 állapotból való elugrás rátája $\lambda_2 = 3$ vagyis a tartózkodási idő várható értéke $\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$.

f.) Az egyes irányokba való ugrások valószínűségeit a beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa adja meg: $Q_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_i}$ ha $i \neq j$, és $Q_{ij} = 0$, ha $i = j$. Most a kérdés csak a 2-ből 3-ba ugrás valószínűségére vonatkozott, vagyis a válasz $Q_{23} = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$. De ha már itt tartunk, felírom az egész mátrixot:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

g.) Az infinitezimális generátort úgy kapjuk a ráta-mátrixból, hogy a főátlóba beírjuk a tartózkodási idő paraméter vektor eleminek ellentettjét (vagyis annyit, hogy a sorösszegek nullák legyenek):

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

h.) Mivel a Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, pontosan egy π stacionárius eloszlás (sorvektor) van, éspedig a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer egyetlen olyan megoldása, ahol a sorösszeg 1. Jelen esetben az egyenletrendszer a szokásos mátrix-reprezentációval

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right),$$

aminek a normált megoldása

$$\pi = \left(\frac{8}{15} \quad \frac{4}{15} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{1}{15} \right).$$

(Az egyenletrendszer megoldásának és a megoldás lenormálásának menetét illetően lásd az előző feladat megoldását, vagy bármelyik lineáris algebra könyvet.)

i.) A Markov lánc folytonos idejű, irreducibilis és véges állapotterű, $t = 120$ perc pedig hosszú idő, ezért a Markov láncok alaptétele értelmében a kezdeti eloszlástól függetlenül

$$\mathbb{P}(X(120) = 3) \approx \pi_3 = \frac{1}{15}.$$

j.) Legyen

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

függvény az állapotéren. Ez éppen a 0 állapot indikátora, így $f(X(t))$ időátlagja éppen azt mondja meg, hogy a sor az idő mekkora hányadában üres. A Markov lánc irreducibilis és véges állapotterű, ezért az ergodtétel értelmében az $f(X(t))$ függvény (idő)átlagja hosszú távon 1 valószínűséggel a stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez tart:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t)) dt &= \mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

7.9 Egy fagyishoz a gyerekek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan ketten, és beállnak a sorba. A fagyis bácsi minden gyermeket független, exponenciális eloszlású idő alatt szolgál ki, 1 perc várható értékkel. Ha a sorban nem áll senki, a fagyis bácsi unatkozik. Hosszú távon az idő hány százalékában fog unatkozni, ha

- A sor hossza legfeljebb 5 lehet, mert ha már 5-en állnak sorban, akkor a további érkező gyerekeket az apukájuk elrángatja.
- A sor hossza akármennyi lehet, de ha legalább 5, akkor csak a gyerekek legelszántabb $\frac{1}{3}$ -a áll be. (Minden gyerek, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel legelszántabb.)

(Segítség: Legyen $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Szabad kihasználni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

Megoldás:

- Legyen a segítség szerint $X(t)$ a sor hossza t perc elteltével. Ennek állapottere $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Ugrani csak szomszédos állapotokba lehet, vagyis $X(t)$ születési-halálozási folyamat. A felfelé ugrás, vagyis a gyerekek érkezésének rátája mindig 2, vagyis $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$. A lefelé ugrás, vagyis a kiszolgálás rátája mindig 1, vagyis $\lambda_{10} = \lambda_{21} = \lambda_{32} = \lambda_{43} = \lambda_{54} = 1$. A többi $\lambda_{ij} = 0$. A gráf-reprezentáció

$$\begin{array}{ccccccccc} & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\ 0 & \rightleftarrows & 1 & \rightleftarrows & 2 & \rightleftarrows & 3 & \rightleftarrows & 4 & \rightleftarrows & 5 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása mindig olyan, hogy minden i -re (amire ez értelmes) $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$. Esetünkben $i = 0, 1, 2, 3, 4$ -re $2\pi_1 = 1\pi_{i+1}$, vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi = \text{const} (1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32) = \left(\frac{1}{63} \quad \frac{2}{63} \quad \frac{4}{63} \quad \frac{8}{63} \quad \frac{16}{63} \quad \frac{32}{63} \right).$$

A fagyis bácsi akkor unatkozik, ha $X(t) = 0$, vagyis az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ (oszlopvektor) időátlagát keressük. Ez az ergodtétel szerint

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{63} \approx 0.016 = 1.6\%.$$

b.) Az állapottér ezúttal $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ végtelen, de $X(t)$ továbbra is születési-halálozási folyamat. A lefelé ugrás rátája továbbra is mindig 1, vagyis $\lambda_{i+1,i} = 1$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). A felfelé ugrás rátája viszont csak akkor 2, ha legfeljebb 4 gyerek áll a sorban, vagyis $\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = 2$. Ha $i \geq 5$, akkor $\lambda_{i,i+1} = \frac{2}{3}$, mert csak minden harmadik érkező gyerek áll be a sorba. A gráf-reprezentáció ezúttal

$$0 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 4 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 5 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2/3} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 6 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2/3} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 7 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{2/3} \\ \xleftarrow{1} \end{array} 8 \dots$$

Így a $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$ szabály minden $i = 0, 1, 2, \dots$ -re érvényes. $i = 0, \dots, 4$ -re azt mondja, hogy $\pi_{i+1} = 2\pi_i$, viszont $i \geq 5$ -re azt, hogy $\pi_{i+1} = \frac{2}{3}\pi_i$. Vagyis az egyetlen stacionárius eloszlás, ha létezik,

$$\pi = c \left(1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 32 \quad \frac{64}{3} \quad \frac{128}{9} \quad \dots \quad \frac{2^i}{3^{i-5}} \quad \dots \right).$$

Esetünkben létezik, mert a vektorban szereplő számok összege véges:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &:= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \frac{64}{3} + \frac{128}{9} + \dots + \frac{2^i}{3^{i-5}} + \dots = \\ &= 31 + 32 \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right) = 31 + \frac{32}{1 - \frac{2}{3}} = 127 < \infty. \end{aligned}$$

Az ergodtétel állítása ebben az esetben is érvényes az $f = (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots)^T$ függvényre, vagyis a fagyis bácsi az idő

$$\overline{f(X)} = \pi f = \pi_0 = \frac{1}{127} \approx 0.8\%$$

-ában unatkozik.

7.10 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban legfeljebb 5 feladat lehet (azzal együtt, amelyik éppen kiszolgálás alatt áll), ami ezen felül esetleg érkezik, az elvész. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

- Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov láncsal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).
- Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.
- Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.
- Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?
- Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?
- A beérkező feladatok mekkora hányada vész el hosszú távon?

Megoldás:

- a.) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, A felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás, és az 5 állapot, ahonnan nincs felfelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{4} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{4} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{4} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 3 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{4} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 4 \begin{array}{c} \xleftrightarrow{4} \\ \xleftarrow{2} \end{array} 5$$

- b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = (2 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ 4),$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

- c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

- d.) Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, a Markov láncok alaptétele szerint hosszú idő elteltével a tartózkodási valószínűségek az egyetlen stacionárius eloszlással közelíthetők. Ezért kiszámoljuk a stacionárius eloszlást, vagyis megoldjuk a $G^T \pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszert, ahol a π sorvektor a stacionárius eloszlás (a transzponáltja pedig oszlopvektor). Pontosabban: ennek a lineáris egyenletrendszernek a végtelen sok megoldása közül azt az egyet keressük, amelyik valószínűségeloszlás (vagyis az elemek összege 1). Az egyenletrendszer:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right),$$

ennek normált megoldása pedig

$$\pi = \left(\frac{32}{63} \quad \frac{16}{63} \quad \frac{8}{63} \quad \frac{4}{63} \quad \frac{2}{63} \quad \frac{1}{63} \right).$$

Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \mid X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{8}{63} \approx 0.127$$

- e.) Legyen az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel értelmében f időátlagos majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i \in S} \pi_i f_i = \pi f = \frac{32}{63}$ -hoz. Tehát a rendszer hosszú távon az idő $\frac{32}{63}$ -át tölti üresjáratban.

- f.) Azt kell kitalálnunk, hogy a beérkező feladatok hanyad része érkezik pont olyankor, amikor a rendszer az 5 állapotban van. Mivel a feladatok érkezési rátája független a rendszer állapotától, ez pontosan annyi lesz, amekkora hányadát az időnek a rendszer az 5 állapotban tölti. Ez pedig az előző ponthoz hasonlóan $\pi_5 = \frac{1}{63}$, vagyis hosszú távon a beérkező feladatok $\frac{1}{63}$ -ada vész el.

7.11 Egy hálózati kiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a feladatok, másodpercenként átlagosan kettő, és beállnak a sorba. Az egyes igények kiszolgálása egymástól és a beérkezésektől is független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, aminek várható értéke $\frac{1}{4}$ másodperc. A sorban akárhány feladat lehet. Jelölje X_t a t időben a sorban álló feladatok számát.

- a.) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov láncsal! Adjuk meg az állapotteret, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt (az egyes átmenetek rátáival).
- b.) Adjuk meg a ráta-mátrixot, a tartózkodási idő paraméter vektort és a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixát.
- c.) Írjuk fel a folyamat infinitezimális generátorát.
- d.) Kezdetben a sor üres. Közelítőleg mekkora valószínűséggel lesz a sorban 120 másodperc elteltével pontosan 2 feladat?
- e.) Az idő mekkora hányadát tölti a kiszolgáló üresjáratban hosszú távon?

Megoldás:

- a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$. Átmenet csak a közvetlen szomszédok között lehet, a felfelé ugrás rátája mindig éppen a beérkező feladatok folyamatának rátája, vagyis 2. A lefelé ugrás rátája az exponenciális kiszolgálási idő paramétere, vagyis várható értékének reciproka, esetünkben 4. Kivétel a 0 állapot, ahonnan nincs lefelé ugrás. A gráf-reprezentáció:

$$0 \xrightleftharpoons[2]{4} 1 \xrightleftharpoons[2]{4} 2 \xrightleftharpoons[2]{4} 3 \xrightleftharpoons[2]{4} 4 \xrightleftharpoons[2]{4} \dots$$

b.) A ráta-mátrix

$$\underline{\lambda} = \begin{pmatrix} * & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & * & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & * & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & * & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & * & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & * & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

a tartózkodási idő paraméter vektor

$$\underline{\lambda} = (2 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6 \ \dots),$$

a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4/4 & 0 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

c.) Az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

d.) A π stacionárius eloszlás végtelen sorvektor, a születési-halálozási folyamat sajátossága miatt eleget kell tennie a $2\pi_k = 4\pi_{k+1}$ egyenletnek *minden* $k = 0, 1, 2, \dots$ -re. Ebből kiolvasható, hogy *ha van stacionárius eloszlás*, akkor az csak olyan lehet, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ -re

$$\pi_k = \frac{\pi_0}{2^k}. \quad (5)$$

A kulcskérdés, ami megkülönbözteti a végtelen állapottér esetét a végestől, az, hogy vajon van-e olyan 1-re *felösszegződő* nemnegatív számsorozat, ami ennek eleget tesz, vagyis π_0 megválasztható-e úgy, hogy

$$\sum_{k \in S} \pi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_0}{2^k} = \pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

legyen. Szerencsére esetünkben a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sor *véges*, konkrétan $= 2$, vagyis $\pi_0 = \frac{1}{2}$ választással az (5) egyenlet tényleg stacionárius eloszlást ad. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\pi = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \dots \right).$$

(Vagyis $\pi = \text{PessGeom}(\frac{1}{2})$ pesszimista geometriai eloszlás.) A végtelen állapotterű születési-halálózási folyamatok stabilitásáról szóló tétel szerint ez tényleg az egyetlen stacionárius eloszlás, a t időbeli eloszlások ehhez konvergálnak. Tehát

$$\mathbb{P}(X_{120} = 2 \mid X_0 = 0) \approx \pi_2 = \frac{1}{8} = 0.125$$

e.) Legyen az $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ függvény annak az indikátora, hogy a rendszer a 0 állapotban, vagyis üresjáratban van. Oszlopvektor formájában írva

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

A végtelen állapotterű születési-halálózási folyamatokra vonatkozó ergodtétel értelmében f időátlaga majdnem biztosan konvergál az egyetlen stacionárius eloszlás szerinti várható értékhez, vagyis $\sum_{i \in S} \pi_i f_i = \pi f$ -hez (ha az átlagolandó függvény olyan, hogy ez a várható érték létezik). Esetünkben hosszú távon az idő $\pi f = \pi_0 = \frac{1}{2}$ részében lesz a gép üresjáratban.

8. Folytonos idejű sorbanállási modellek

8.1 Legyen az X valószínűségi változó eloszlása *nullában torzított geometriai*: $X = V \cdot Y$ ahol $V \sim B(p)$, $Y \sim \text{Geom}(r)$ és Y független V -től. (Magyarul: feldobunk egy hamis érmét, amin a fej val.sége p . Ha írás jön ki, akkor $X = 0$, ha pedig fej, akkor X legyen $\sim \text{Geom}(r)$.)

- Írjuk fel X eloszlását (vagyis a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket). *(Megjegyzés: Erre nem lesz szükség a többi részfeladathoz.)*
- Mennyi X várható értéke?
- Mennyi X^2 várható értéke?
- Mennyi X szórása?
- Mi X generátorfüggvénye? *(Tipp: teljes várható érték tétel.)*

Megoldás:

a.) $P(V=0) = 1-p$, $P(V=1) = p$, $P(Y=k) = (1-r)^{k-1} r$ $k=1,2,3,\dots$
 és függetlenek

$$\Rightarrow P(X=k) = \begin{cases} h_0 & k=0: P(V=0) = 1-p \\ h_k & k \geq 1: P(V=1, Y=k) = p (1-r)^{k-1} r \end{cases}$$

b.) $X = VY$ és függetlenek $V \sim B(p)$, $Y \sim \text{Geom}(r)$

$$\Rightarrow \underline{EX} = EV EY = p \cdot \frac{1}{r}$$

c.) $EX^2 = E(V^2 Y^2)$ függetlenség $EV^2 EY^2$,

így $EV^2 = EV = p$

$EY^2 = \text{Var} Y + (EY)^2 = \frac{1-r}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{2-r}{r^2}$ (a nevezetes összefüggés alapján)

$$\Rightarrow \underline{EX^2} = p \frac{2-r}{r^2}$$

d.) $\underline{\text{Var} X} = EX^2 - (EX)^2 = p \frac{2-r}{r^2} - \left(\frac{p}{r}\right)^2 = \frac{2-r-p}{r^2} p \Rightarrow \underline{DX} = \frac{p(2-r-p)}{r}$

e.) $\underline{g_X(z)} = E(z^X) \stackrel{\text{def}}{=} E(z^{VY}) \stackrel{\text{T.V.É.T.}}{=} P(V=0) E(z^{VY} | V=0) + P(V=1) E(z^{VY} | V=1) = (1-p) \cdot 1 + p E(z^Y | V=1)$

függetlenség
 T.V.É.T.
 miatt a
 feltétel elhagyható

$$(1-p) + p E(z^Y) = (1-p) + p g_Y(z) \stackrel{Y \sim \text{Geom}(r)}{=} (1-p) + p \frac{rz}{1-(1-r)z}$$

8.2 Tegyük fel, hogy az $X \in \mathbb{N}$ val.változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{a+bz}{c+dz}$ alakú, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $c \neq 0$. Lássuk be, hogy ekkor X eloszlása 0-ban torzított geometriai.

Megoldás:

A 0-ban torzított geometriai eloszlás generátorfüggvénye
 pont ilyen alakú: Ha $X = VY$ ahol $V \sim B(p)$ és $Y \sim \text{Geom}(r)$
 és ftt-dk, akkor \leftarrow döntő feladat

$$g_X(z) = 1-p + p \frac{rz}{1-(1-r)z} = \frac{1-p + (1-p)(1-r)z + prz}{1-(1-r)z}$$

másfelől $g(z) = \frac{a+bz}{c+dz} = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}z}{1 + \frac{d}{c}z}$ egyenlők,

ha $\frac{d}{c} = -(1-r), \frac{a}{c} = 1-p, \frac{b}{c} = (1-p)(1-r) + pr.$

[Ahhoz, hogy $g(z)$ tényleg generátorfv legyen, persze kell,
 hogy a, b, c, d viszonya ~~az~~ (és dörjde) megfelelő legyen,
 pl. $g(1) = \frac{a+b}{c+d} = 1$ legyen.]

8.3 Legyen az X valószínűségi változó eloszlása hiányos exponenciális: $X = V \cdot Y$ ahol $V \sim B(p)$, $Y \sim \text{Exp}(\alpha)$ és Y független V -től. (Magyarul: feldobunk egy hamis érmét, amin a fej való.sége p . Ha írás jön ki, akkor $X = 0$, ha pedig fej, akkor X legyen $\sim \text{Exp}(\alpha)$).

- Mennyi X várható értéke?
- Mennyi X^2 várható értéke?
- Mennyi X szórása?
- Mi X Laplace transzformáltja? (Tipp: teljes várható érték tétel.)

Megoldás:

a.) A függetlenség miatt $\underline{EX = E(VY) = EV EY = \frac{p}{\alpha}}$

b.) Ugyanígy $\underline{EX^2 = E(VY^2) = EV^2 EY^2}$, ebből

$$EV^2 = EV = p$$

$$EY^2 = \text{Var} Y + (EY)^2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\alpha^2}$$

} nevezetes eloszlások
sábrács

$$\Rightarrow \underline{EX^2 = p \frac{2}{\alpha^2}}$$

c.) $\underline{\text{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2p}{\alpha^2} - \left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 = \frac{p(2-p)}{\alpha^2}} \Rightarrow DX = \frac{\sqrt{p(2-p)}}{\alpha}$

d.) $\underline{L_X(s) = E(e^{-sX}) = E(e^{-sVY})}$ T.V.É.T.

$$= P(V=0) E(e^{-sVY} | V=0) + P(V=1) E(e^{-sVY} | V=1) =$$

$$= P(V=0) \cdot 1 + P(V=1) E(e^{-sY} | V=1)$$

függelenség miatt
a feltétel
elhagyható

$$= (1-p) + p \underbrace{E(e^{-sY})}_{L_Y(s)} \stackrel{Y \sim \text{Exp}(\alpha)}{=} \underline{(1-p) + p \frac{\alpha}{\alpha+s}}$$

8.4 Tegyük fel, hogy az $X \geq 0$ val. változó Laplace transzformáltja $L(s) = \frac{a+bs}{c+ds}$ alakú, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ és $d \neq 0$. Lássuk be, hogy ekkor X eloszlása hiányos exponenciális.

Megoldás:

A hibás exponenciális eloszlás Laplace transformáltja pont ilyen alakú: Ha $X=VY$ ahol $V \sim B(p)$, $Y \sim \text{Exp}(\alpha)$ és fth-ek, akkor

$$L_X(s) = \frac{(1-p) + p \frac{\alpha}{\alpha+s}}{(1-p) + p \frac{\alpha}{\alpha+s}} = \frac{(1-p)\alpha + (1-p)s + p\alpha}{\alpha+s}$$

← dőő feladat

másfelől $L(s) = \frac{a+bs}{c+ds} = \frac{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}s}{\frac{c}{d} + s}$

} $a = -k,$

$$\text{ha } \frac{a}{d} = (1-p)\alpha + p\alpha, \quad \frac{b}{d} = 1-p, \quad \frac{c}{d} = \alpha.$$

Ahhoz hogy $L(s)$ tényleg Laplace transformált legyen, persze kell, hogy a, b, c, d viszonya (és előjele) megfelelő legyen, pl.

$$L(0) = \frac{a}{b} = 1 \text{ legyen.}$$

- 8.5 Móricka egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan tizenötön, és beállnak a Móricka irodája előtt kigyózó sorba. Ebben a tempóban Móricka nyilván nem győzné a sok kérdést. Ám szerencsére nem minden hallgató jut el a kérdezésig: mindegyikük, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel rossz konzultációra jött, és erre csak akkor jön rá, amikor sorra került. Akkor viszont azonnal kiderül a hiba, és a hallgató azonnal elmegy. (Más szóval: az egy hallgatóra fordítandó idő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nulla, a maradék $\frac{2}{3}$ valószínűséggel

pedig exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel.)

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

- a.) Mi T eloszlása?
- b.) Mi S eloszlása? *(Itt kell észnél lenni!)* Mennyi S várható értéke? Mennyi S szórásnégyzete? Mi S Laplace transzformáltja?
- c.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?
- d.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában válaszol kérdésekre Móricka?
- e.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban, *nem számítva* azt, akinek Móricka éppen válaszol?
- f.) Móricka, valahányszor egy kérdésre válaszolt, és a hallgató éppen elment, kinéz az ajtón. Hosszú távon átlagosan hány embert lát sorban állni?
- g.) Hosszú távon, átlagosan, az érkező hallgatók hány másik embert találnak maguk előtt a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?
- h.) A sok hallgató átlagosan hány percet tölt sorban állással (nem számítva azt az időt, amikor Móricka már vele foglalkozik)?
- i.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten állnak előtte a sorban? *(Tipp: számoljuk ki a sorban állók számának generátorfüggvényét, aztán nézzük meg jól.)*
- j.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül? *(Tipp: számoljuk ki a várakozási idő Laplace transzformáltját, aztán nézzük meg jól.)*
- k.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc múlva már nincs is ott?

Megoldás:

Az iddt percben mdrem. brnlknt 15, 97 percentknt $\frac{1}{4}$

a.) A stvreg sterint $T \sim \text{Exp}(\frac{1}{4})$. Ehhez minden hallgatlt figyelembel veslel: azt is, aki feleslegesen jtt.

b.) $S = 0$, ha a hallgatlt tervelssbl jtt, vagyis $\frac{1}{3}$ val-sggel. } vagyis

A maradk $\frac{2}{3}$ val-sggel $S \sim \text{Exp}(\frac{1}{5})$
 \uparrow ~~deklat~~
 vrtknt erkle 5 perc

S hiányos exponenciális eloszlású:

$$S = VY \text{ ahol } V \sim B(p), Y \sim \text{Exp}(\alpha), \quad \boxed{p = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{1}{5}}$$

\Rightarrow korábbi feladat $\Rightarrow \boxed{ES = \frac{p}{\alpha} = \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3}}$

$$\boxed{\text{Var } S = \frac{p(2-p)}{\alpha^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot 5^2 = \frac{400}{9}}$$

$$\boxed{L_S(s) = (1-p) + p \frac{\alpha}{\alpha+s} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1/5}{1/5+s} = \frac{3+5s}{3(1+5s)}}$$

f.) Legyen A_n a sorozat n -edik kiszolgálás után közvetlenül,

$$\text{Előadásról: } \underline{\bar{A}} = \underline{\bar{N}} = \frac{85}{12} \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$$

g.) Legyen B_n a sorozat n -edik igény (kellgató) értéke előtt közvetlenül.

$$\text{Előadásról: } \bar{B} = \bar{N} = \frac{85}{12} \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n}{n}$$

h.) Előadásról: hosszú távon az átlagos várakozási idő

$$\boxed{\bar{W} = \frac{\sum S(1+c^2)}{2(1+S)} = \frac{\frac{10}{3} \cdot \frac{5}{6} (\cancel{1+1})}{2 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{3} \approx 16.67} \quad \boxed{\frac{3 \cdot 10 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 25 \text{ (perc)}}$$

i.) Előadásból tudjuk, hogy B_n^- (az érleléskor előtte állók) száma határeloszlásának generátorfüggvénye

$$g_{B_{stac}^-}(z) = (1-s)(1-z) \frac{L_s(\lambda(1-z))}{L_s(\lambda(1-z)) - z} = \left(1 - \frac{5}{6}\right)(1-z) \frac{\frac{3+5\lambda(1-z)}{3(1+5\lambda(1-z))}}{\frac{3+5\lambda(1-z)}{3(1+5\lambda(1-z))} - z}$$

Ez nem is olyan vésztés: racionális törtfüggvény alakú:

$$g_{B_{stac}^-}(z) = \frac{1}{6}(1-z) \frac{3 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}z}{\underbrace{\left(3 + \frac{5}{4}(1-z) - 3z - 3 \cdot \frac{5}{4}(1-z)z\right)}_{3(1-z)}} =$$

$$= \frac{1-z}{6} \frac{\frac{17}{4} - \frac{5}{4}z}{(1-z)\left(3 + \frac{5}{4} - \frac{15}{4}z\right)} \quad \text{Körny. (1-z)-vel}$$

lehet egyszerűsíteni!!

$$= \frac{1}{6} \frac{\frac{17}{4} - \frac{5}{4}z}{\frac{17}{4} - \frac{15}{4}z} = \frac{1}{6} \frac{17-5z}{17-15z} = \frac{\text{elsőfokú}}{\text{elsőfokú}}$$

Korábbi feladat → az egy (2-ban torzított geometriai) eloszlás:

perste $P(B_{stac}^- = 0) = g_{B_{stac}^-}(0) = \frac{1}{6}$ (hát perste, $1-s = \frac{1}{6}$)
 az éves átlag

Ezt így írjuk:

$$g_{B_{stac}^-}(z) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{\frac{2}{17}z}{1 - \frac{15}{17}z}$$

Első lépésben ha n nagy, akkor jó közelítéssel

$$B_n = \begin{cases} 0 & \frac{1}{6} \text{ val. slyggel} \\ \sim \text{Geom}\left(\frac{2}{17}\right) & \frac{5}{6} \text{ val. slyggel} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(B_n \leq 2) \approx \frac{1}{6} + \frac{5}{6} P(Y \leq 2) \quad \text{ahol } Y \sim \text{Geom}\left(\frac{2}{17}\right)$$

A lépéses leírásért:

$$P(Y > 2) = P(\text{első két dobásra nem sikerül
fejet dobni, ha } P(\text{fej}) = \frac{2}{17}) = \left(\frac{15}{17}\right)^2$$

$$\Rightarrow P(Y \leq 2) = 1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2$$

$$\Rightarrow P(B_n \leq 2) \approx \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \left(1 - \left(\frac{15}{17}\right)^2\right) \approx 0.35 = 35\%$$

$$= 1 - \frac{5}{6} \left(\frac{15}{17}\right)^2$$

j.) Előadástól tudjuk, hogy a várakozási idő határelosztásának Laplace transzformáltja

$$L_W(s) = (1-g) \frac{s}{\lambda L_S(s) + s - \lambda} = \left(1 - \frac{5}{6}\right) \frac{s}{\frac{1}{4} \frac{3+5s}{3(1+5s)} + s - \frac{1}{4}}$$

Ez nem is olyan ijesztő: racionális törtfüggvény

$$L_W(s) = \frac{1}{6} \frac{12(1+5s) \cdot s}{s + 5s + s \cdot 12(1+5s) - \frac{1}{4} + 15s} \quad \begin{array}{l} \text{Hurrá, } s\text{-sel} \\ \text{lehet egyre-} \\ \text{rűsíteni} \end{array}$$

$$= \frac{2(1+5s)}{5 + 15 + 12(1+5s)} = \frac{2(1+5s)}{17 + 60s} = \frac{1+5s}{10 + 30s} =$$

elsőtől elsőtől karunk feladat \rightarrow W eloszlása hidrogén
exponenciális

$$L_W(s) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{1}{1+30s} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \frac{1/30}{1/30 + s}$$

Ebből ha n nagy akkor jó közelítéssel

$$W_n = \begin{cases} 0 & \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel} \\ \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{30}\right) & \frac{5}{6} \text{ valószínűséggel} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \boxed{P(W_n < 10)} &= P(W_n = 0) + \frac{5}{6} P(\text{Exp}\left(\frac{1}{30}\right) < 10) \approx \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \left(1 - e^{-\frac{10}{30}}\right) = \\ &= \underline{\underline{1 - \frac{5}{6} e^{-\frac{1}{3} 125} \approx 0.40 = 40\%}} \end{aligned}$$

k.) Előadásból tudjuk, hogy a késleltetés határeloszlásának Laplace transzformáltja

$$L_D(s) = (1-s) \frac{s L_s(s)}{1 L_s(s) + s - 1} = \cancel{(1-s)} L_w(s) L_s(s)$$

$$= \frac{1+s}{1+30s} \frac{3+s}{3(1+s)} = \frac{3+s}{3(1+30s)} \quad \text{Hurró elsőfokú / elsőfokú}$$

$\Rightarrow D_n$ határeloszlása is hiányos exponenciális:

$$L_D(s) = \frac{1}{18} + \frac{17}{18} \frac{1}{1+30s} = \frac{1}{18} + \frac{17}{18} \frac{1/30}{1/30+s}$$

Ebből ha n nagy, akkor jó közelítéssel

$$D_n = \begin{cases} 0 & \frac{1}{18} \text{ val. slyggal} \\ \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{30}\right) & \frac{5}{6} \text{ val. slyggal} \end{cases}$$

Hat parste: a késleltetés akkor nulla, ha a sorfűresen találjuk és még ~~fel~~ felvételestől is jött

$$\Rightarrow P(D_n < 10) \approx P(D_n = 0) + \frac{17}{18} P(\text{Exp}\left(\frac{1}{30}\right) < 10) = \frac{1}{18} + \frac{17}{18} \left(1 - e^{-\frac{10}{30}}\right)$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{17}{18} e^{-\frac{1}{3}}}} \approx \underline{\underline{0.32 = 32\%}}$$

8.6 Mórcka egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő

alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan húszpercenként. Igen ám, de nem csak egyesével jöhetnek: előfordul, hogy több hallgató is jön *egyszerre*: konkrétan az érkezők száma mindig az előzményektől független, $p = \frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változó. (Megjegyzés: Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a hallgatók „összetett Poisson folyamat” szerint érkeznek.)

Ezt úgy is fel lehet fogni, hogy egy hallgató érkezése után $q = \frac{2}{3}$ valószínűséggel azonnal érkezik egy másik, a maradék $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont egy exponenciális véletlen időt kell kivárni, 20 perc várható értékkel.

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

- a.) Mi S eloszlása?
- b.) Mi T eloszlása? (Itt kell észnél lenni!) Mennyi T várható értéke? Mi T Laplace transzformáltja?
- c.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?
- d.) Hosszú távon az idő mekkora hányadában válaszol kérdésekre Móricka?
- e.) Hosszú távon átlagosan hány hallgató áll a sorban, *nem számítva* azt, akinek Móricka éppen válaszol?
- f.) Móricka, valahányszor egy kérdésre válaszolt, és a hallgató éppen elment, kinéz az ajtón. Hosszú távon átlagosan hány embert lát sorban állni?
- g.) Hosszú távon, átlagosan, az érkező hallgatók hány másikat találnak maguk előtt a sorban (beleértve azt is, akinek Móricka éppen válaszol)?
- h.) A sok hallgató átlagosan hány percet tölt sorban állással (nem számítva azt az időt, amikor Móricka már vele foglalkozik)?
- i.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb ketten állnak előtte a sorban?
- j.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül?
- k.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy 10 perc múlva már nincs is ott?

8.7 Pistikék háza előtt reggelente a buszok λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek a játszótér irányából, és mennek tovább az iskola irányába. Egy ettől független μ intenzitású Poisson folyamat szerint viszont az iskola irányából érkeznek, és mennek a játszótér irányába.

Reggel 7-kor Pistike álmosan támolyog ki a ház elé, és felszáll az első arra járó buszra. Mennyi a valószínűsége, hogy a játszótér irányába utazik?

8.8 Legyenek $S \sim \text{Exp}(\mu)$ és $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ független valószínűségi változók. Mennyi a $\mathbb{P}(S > T)$ valószínűség?

(Tipp: nem kell számolni. Aki mégis számolni szeretne, annak egy lehetséges megoldás (a sok közül) a teljes valószínűség tétele:

$$\mathbb{P}(S > T) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x) \mathbb{P}(S > T | T = x) dx$$

ahol f_T a T sűrűségfüggvénye.)

- 8.9 Legyenek $S, T \geq 0$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $S \sim \text{Exp}(\mu)$. (T bármilyen eloszlású lehet, csak ne legyen negatív. Az érdekes eset az lesz, amikor T is exponenciális. Akinek az könnyebb, csinálja csak arra.) Legyen $U = S - T$ és legyen $u > 0$. Feltéve, hogy $U > 0$, mennyi a valószínűsége, hogy $U > u$?

Egész pontosan: kérdés a $\mathbb{P}(U > u | U > 0)$ feltételes valószínűség.

(Tipp: A kérdés persze átfogalmazható így: $\mathbb{P}(S > T + u | S > T) = ?$)

- 8.10 Legyenek $S \sim \text{Exp}(\mu)$ és $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ független valószínűségi változók, és legyen $U = S - T$.

a.) Számoljuk ki U sűrűségfüggvényét!

- b.) Legyenek V, A és B független valószínűségi változók, $V \sim B(p)$, $A \sim \text{Exp}(\alpha)$, $B \sim \text{Exp}(\beta)$, és legyen

$$\tilde{U} = VA + (1 - V)(-B).$$

(Magyarul: Feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p . Ha az eredmény fej, akkor \tilde{U} -t α paraméterű exponenciálisnak választjuk; ha viszont írás, akkor β paraméterű exponenciálisnak, negatív előjellel.)

Hogyan kell megválasztani a p, α és β paramétereket, hogy U és \tilde{U} azonos eloszlású legyen?

(Tipp: Bármelyik rész-feladat megoldásából azonnal adódik a válasz a másikra. Aki számolni szeret, kezdje az elsővel. Aki az előző pár feladatot megoldotta, kezdje a másodikkal.

Aki az elsővel kezdené, annak egy lehetséges megoldás (a sok közül) a teljes valószínűség tétel:

$$\mathbb{P}(U < u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(x) \mathbb{P}(U < u | T = x) dx$$

ahol f_T a T sűrűségfüggvénye, illetve

$$\mathbb{P}(U < u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x) \mathbb{P}(U < u | S = x) dx$$

ahol f_S az S sűrűségfüggvénye. u előjelétől függ, hogy ezek közül melyik a kényelmesebb.)

- 8.11 Legyen $0 \leq C \leq 1$, $\gamma > 0$ és

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1 - Ce^{-\gamma x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

(Vagyis F egy hiányos exponenciális eloszlású X val.változó eloszlásfüggvénye: $1 - C$ val.séggel $X = 0$, a maradék val.séggel $X \sim \text{Exp}(\gamma)$.)

a.) Legyen $B \sim \text{Exp}(\lambda)$. Minden $x \geq 0$ -ra számoljuk ki az $I_1(x) := \mathbb{E}(F(x + B))$ várható értéket.

b.) Legyen $A \sim \text{Exp}(\mu)$. Minden $x \geq 0$ -ra számoljuk ki az $I_2(x) := \mathbb{E}(F(x - A))$ várható értéket.

(Tipp: Az eredmény tényleg csak $x \geq 0$ -ra kell, és persze mindkét részfeladatnál ki kell használni, hogy $x \geq 0$.)

8.12 Legyenek $S \sim \text{Exp}(\mu)$ és $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ független valószínűségi változók, és legyen $U = S - T$. Oldjuk meg az

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ \mathbb{E}(F(x - U)), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Lindley-féle integrálegyenletet. (Vagyis: keressük azt az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amire az egyenlet teljesül.)

(Megjegyzés: előadásról tudjuk, hogy minek kell kijönni. Azért csak ellenőrizzük le, hogy az tényleg jó. Milyen μ és λ mellett lesz F eloszlásfüggvény?)

8.13 Mórica egyéni konzultációt tart a hallgatóinak. A hallgatók kérdéseire egyesével válaszol, minden hallgató (egyetlen) kérdésére az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt, átlagosan 5 perc alatt. A kíváncsi hallgatók Poisson folyamat szerint érkeznek, átlagosan húszpercenként. Igen ám, de nem csak egyesével jöhetnek: előfordul, hogy több hallgató is jön egyszerre: konkrétan az érkezők száma mindig az előzményektől független, $p = \frac{1}{3}$ paraméterű geometriai eloszlású val.változó. (Megjegyzés: Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a hallgatók „összetett Poisson folyamat” szerint érkeznek.)

Ezt úgy is fel lehet fogni, hogy egy hallgató érkezése után $q = \frac{2}{3}$ valószínűséggel azonnal érkezik egy másik, a maradék $\frac{1}{3}$ valószínűséggel viszont egy exponenciális véletlen időt kell kivárni, 20 perc várható értékkel.

Másfelől nem minden hallgató jut el a kérdésig: mindegyikük, a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel rossz konzultációra jött, és erre csak akkor jön rá, amikor sorra került. Akkor viszont azonnal kiderül a hiba, és a hallgató azonnal elmegy. (Más szóval: az egy hallgatóra fordítandó idő $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nulla, a maradék $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig exponenciális eloszlású 5 perc várható értékkel.)

Nézzük a folyamatot mint kiszolgálási sort, ahol az érkezések között eltelt idők $T_1, T_2, \dots \sim T$, a kiszolgálási idők $S_1, S_2, \dots \sim S$.

a.) Mi S eloszlása?

b.) Mi T eloszlása?

c.) Pistike sokadikként érkezik a konzultációra. Mennyi a valószínűsége, hogy kevesebb, mint 10 perc alatt sorra kerül? (Tipp: a várakozási idő határeloszlása hiányos exponenciális.)