2. Generátorfüggvény

Nemnegatív értékű valószínűségi változók esetén lehet értelmezni a valószínűségi változó generátorfüggvényét. A generátorfüggvény teljes értékű, alternatív leírást ad a valószínűségi változó eloszlásáról. Sok esetben a generátorfüggvényt könnyebb kiszámolni, mint magát az eloszlást.

1. A generátorfüggvény tulajdonságai

1. definíció. Egy $a_0, a_1, \dots$ valós számokból álló sorozat generátorfüggvénye a következő hatványsor

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

Ez a hatványsor konvergens, ha $|z| < z_0$, ahol $z_0 = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

2. definíció. Legyen X egy nemnegatív értékű valószínűségi változó, $p_k = \mathbf{P}(X = k)$, $k = 0, 1, \dots$ eloszlással. Ekkor X generátorfüggvénye a következő hatványsor

$$G_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$$

$G_X(z)$ konvergens a $[0, 1]$ intervallumon, ugyanis $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|p_n|}} \geq 1$, továbbá

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

1. <u>tétel</u> (Alaptulajdonság)**.** A generátorfüggvény meghatározza az eloszlást:

$$\frac{G^{(k)}}{k!} = p_k \quad \text{minden} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{esetén.}$$

Azaz a generátorfüggvény deriválásával visszakapjuk az eloszlást. ($f^{(n)}$ jelöli az f függvény n-dik deriváltját.)

1. példa. $I \sim \mathit{Indikator}(p)$. Egy A esemény bekövetkezését vizsgáljuk, amely p valószínűséggel következik be. Ekkor

$$I = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \text{ bekövetkezik,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $\mathbf{P}(X = 1) = p$, $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$, tehát Ekkor

$$G_I(z) = p_0 + p_1 z = 1 - p + pz.$$

2. példa. $X \sim \mathit{Geom}(p)$. X eloszlása: $\mathbf{P}(X = k) = (1-p)^k p$, ha $k = 0, 1, \dots$.

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k p z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} [(1-p)z]^k = \frac{p}{1 - (1-p)z}.$$

3. példa. $X \sim \mathit{Poisson}(\lambda)$. X eloszlása: $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, ha $k = 0, 1, \dots$.

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}.$$

2. <u>tétel</u>. Egy X valószínűségi változó $G_X(z)$ generátorfüggvényére teljesülnek a következő állítások:

a) $G_X(z) = \mathbf{E}\left(z^X\right)$.

b) $G'_X(1) = \mathbf{E}X$, ha a $\mathbf{E}X$ létezik. $G''_X(1) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}X$, ha $\mathbf{E}(X^2)$ létezik. Ha $\mathbf{E}X^n$ létezik, akkor $G^{(n)}_X(1)$ felírható az első n momentum lineáris kombinációjaként, azaz valamilyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számokra:

$$G^{(n)}_X(1) = a_1 \mathbf{E}X * a_2 \mathbf{E}(X^2) + \dots + a_n \mathbf{E}(X^n).$$

c) $\mathbf{D^2}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$.

A következő tétel szerint két független valószínűségi változó összegének a generátorfüggvénye nagyon egyszerűen számolható.

3. tétel. Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor az összegük generátorfüggvényére fennáll a következő:

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Ennek a tételnek a következménye a következő.

1. következmény. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók. Ekkor

$$G_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(z) = G_{X_1}(z)G_{X_2}(z)\cdots G_{X_n}(z).$$

Ennek alkalmazása a következő:

4. példa. $X \sim Binom(n,p)$ estén X felírható n független, azonos eloszlású indikátor változó, $I_1, \ldots, I_n$ összegeként. Ahol $I_k = 1$, ha a k. kísérlet sikeres, és $I_k = 0$, különben:

$$X = I_1 + I_2 + \cdots + I_n.$$

Használva a 3. tételt és a 1. példa eredményét azt kapjuk, hogy

$$G_X(z) = G_{I_1+\cdots+I_n}(z) = G_{I_1}(z)\cdots G_{I_n}(z) = (1-p+pz)^n.$$

5. példa (Poisson eloszlások összege)**.** Ha $X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$, és egymástól függetlenek, akkor $X+Y \sim Poisson(\lambda+\mu)$. Ugyanis,

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)}e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)},$$

ami nem más mint egy $Poisson(\lambda+\mu)$ eloszlású valószínűségi változó generátorfüggvénye.

A következő tétel a gyakorlatban és az elméletben is nagyon gyakran felmerülő véletlen tagszánű összeg generátorfüggvényét adja meg.

4. tétel. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ nemnegatív egész értékű, független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen N nemnegatív értékű valószínűségi változó, amely független az X_i-ktől. Ekkor az

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_N, \text{ ha } N > 0 \quad Y = 0, \text{ ha } N = 0 \tag{1}$$

véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye:

$$G_Y(z) = G_N\left(G_X(z)\right).$$

Ennek segítségével könnyen számolható Y várható értéke.

2. következmény. A fent definiált Y-ra igaz a következő:

$$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N\mathbf{E}X_1,$$

$$\mathbf{D^2}(Y) = \mathbf{D^2}(N)\mathbf{E}^2(X_1) + \mathbf{E}(X_1)\mathbf{D^2}(X_1).$$

A véletlen tagszámú összeg két alkalmazására nézzük a következő két példát.

6. példa. Egy routerhez beérkező igények között eltelő idő exponenciális eloszlású λ paraméterrel.

Tudjuk, hogy ekkor a t ideig beérkezett igények száma (N_t) Poisson eloszlású λt paraméterrel. Három területről érkezhetnek a csomagok ehhez a routerhez. Minden csomag a többitől függetlenül az

1. helyről érkezik	0,5 valószínűséggel
2. helyről érkezik	0,3 valószínűséggel
3. helyről érkezik	0,2 valószínűséggel

Határozzuk meg, hogy milyen eloszlású az 1., 2., 3. helyről beérkezett csomagok száma külön-külön.

A 2. helyről beérkező csomagok számának, $N_t(2)$-nek az eloszlását határozzuk meg, a többi ugyanúgy számolható. $N_t(2)$ generátorfüggvényét fogjuk meghatározni. Ehhez fontoljuk meg a következőket. N_t generátorfüggvénye

$$G_{N_t}(z) = e^{\lambda t(z-1)}.$$

Legyen

$$\mathbf{I}_n := \begin{cases} 1 & \text{, ha az } n. \text{ csomag az 2. helyről jött} \\ 0 & \text{, különben.} \end{cases}$$

Ekkor $N_t(2)$ egy véletlen tagszámú összeg:

$$N_t(2) = I_1 + I_2 + \cdots + I_{N_t}.$$

Ekkor a 4. tételt és a 1. és 3. példákat használva:

$$G_{N_t(2)}(z) = G_{N_t}(G_{I_1}(z)) = e^{\lambda t(G_(I_1)(z)-1)} = e^{\lambda t(0{,}7+0{,}3z-1)} = e^{\lambda t(0{,}3z-0{,}3)} = e^{(0{,}3\lambda)t(z-1)},$$

tehát $N_t(2)$ *Poisson* eloszlású $0,3\lambda$ paraméterrel.

2. További eloszlással ekvivalens függvények

Ha az X valószínűségi változó $[0,\infty)$ értékű, akkor a Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)$$

is teljes leírást ad az X eloszlásáról.

Ha az X valószínűségi változó $[(-\infty,\infty)$ értékű, akkor a karakterisztikus függvénye

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right).$$

is teljes leírást ad az X eloszlásáról.

Mindkettő hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a generátorfüggvény. Például, ha X, Y függetlenek, akkor

$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t) \text{ és } \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t).$$

Továbbá az Y (1)-beli véletlen összegre igaz:

$$\mathcal{L}_S(t) = G_N(\mathcal{L}_X(t)) \text{ és } \phi_S(t) = G_N(\phi_X(t)).$$

a bizonyítás majdnem ugyan az, mint generátorfüggvények esetén, a teljes várható érték tételt kell használni.

További hasonlóság, hogy a deriváltak segítségével kifejezhetőek a momentumok. A Laplace-transzformált esetén, ha $\mathbf{E}X$ létezik és véges, akkor

$$\mathcal{L}'_X(t) = \left[\mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)\right]' = \mathbf{E}\left(-Xe^{-tX}\right),$$

és az n-dik deriváltra, ha $\mathbf{E}X^n$ létezik és véges, akkor

$$\mathcal{L}_X^{(n)}(t) = \left[\mathbf{E}\left(e^{-tX}\right)\right]^{(n)} = \mathbf{E}\left((-X)^n e^{-tX}\right).$$

Ha 0-t helyettesítünk, akkor kapjuk a következőt

$$\mathcal{L}_X^{(n)}(0) = \mathbf{E}\left((-X)^n e^0\right) = \mathbf{E}\left((-X)^n\right).$$

Ennek alkalmazása a következő.

7. példa. Az $M/M/1$ kiszolgáló rendszerben[1], ha a rendszer már stacionárius, akkor tetszőleges időpontban ránézve a rendszerre a pufferben lévő csomagok száma, N eloszlása *Geometriai* λ/μ paraméterrel, ld. a 2.. példát.

[1] A csomagok beérkezése között eltelő idő egymástól független, azonos, *exp* eloszlású λ paraméterrel. A foglaltsági időszakban a csomagok kiszolgálása között eltelő idő $exp(\mu)$ eloszlású. A stabilitás érdekében feltesszük, hogy $\lambda < \mu$.

Ekkor egy tetszőleges csomag beérkezésekor a várakozási idő csomag kiszolgálásáig felírható

$$W = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$$

alakban.

Ekkor a W Laplace-transzformáltjára igaz a fenti:

$$\mathcal{L}_W(t) = G_N(\mathcal{L}_Y(t)).$$

Ha a várható értéket, $\mathbf{E}W$-t szeretnénk megkapni, akkor deriválni kell, és 0-t helyettesíteni:

$$\mathbf{E}W = -\mathcal{L}'_W(0) = -\mathcal{L}'_W(t)\restriction_{t=0} = -G'_N(\mathcal{L}_Y(t))\mathcal{L}'_Y(t)\restriction_{t=0} = -G'_N(\mathcal{L}_Y(0))\mathcal{L}'_Y(0) = -G'_N(1)(-\mathbf{E}Y) = \mathbf{E}N\cdot\mathbf{E}Y,$$

felhasználva, hogy minden esetben $\mathcal{L}_X(0) = \mathbf{E}(e^{-0X}) = 1$.

Innen már várakozási idő várható értéke kiszámolható:

$$\mathbf{E}W = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}Y_1 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-\lambda}{\lambda\mu}.$$

A generátorfüggvény, Laplace-transzformált, karakterisztikus függvény egyik fő felhasználási területe eloszlásban vett konvergenciák bizonyítása. Erre nem nézünk példát.

3. Eloszlásbeli egyenletek megoldása

A generátorfüggvény, Laplace-transzformált, karakterisztikus függvény további fő felhasználási területe eloszlásban adott egyenletek megoldása.

8. *példa.* Tekintsünk egy diszkrét idejű kiszolgáló rendszert. Minden csomagnak a kiszolgálása két időegységet igényel. Egy időegység alatt p valószínűséggel érkezik csomag, $1-p$ valószínűséggel nem érkezik. Határozzuk meg a foglaltsági idő hosszának az eloszlását.

A foglaltsági idő attól pillanattól, hogy beérkezik ez első csomag az üres kiszolgáló rendszerbe addig tart, ameddig újra üres nem lesz a sor. Jelöljük B-vel a foglaltsági idő hosszát.

Legyen X az első csomag kiszolgálása után a sorban maradó igények száma. X $Binom(2,p)$ eloszlású, azaz 3 értéke lehetséges $0,1,2$. Nézzük meg, hogy ha feltesszük az $X=i$ feltételt, akkor mi B feltételes eloszlása.

1. Ha $X=0$, akkor B eloszlása az azonosan 2 valószínűségi változó eloszlása:

$$\mathbf{P}(B = 2 \mid X = 0) = 1.$$

2. Ha $X=1$, akkor B eloszlása 2 plusz egy B eloszlásával megegyező hosszúság:

$$\mathbf{P}(B < t \mid X = 1) = \mathbf{P}(2 + B < t).$$

3. Ha $X=2$, akkor B eloszlása 2 plusz B_1+B_2, ahol B_1 független B_2-től, és mindkettőjük eloszlása B eloszlásával megegyező:

$$\mathbf{P}(B < t \mid X = 1) = \mathbf{P}(2 + B_1 + B_2 < t).$$

Összefoglalva a (**??**)-hez hasonló felírásban:

$$X \overset{\text{eloszlásban}}{=} 2\mathbf{I}\{X=0\} + (2+B)\mathbf{I}\{X=1\} + (2+B_1+B_2)\mathbf{I}\{X=2\},$$

ahol $\mathbf{I}$ az indikátor függvény. Használjuk a teljes várható érték tételt:

$$G_B(z) = \mathbf{E}z^B = \mathbf{E}\left(z^B \mid X=0\right)\mathbf{P}(X=0) + \mathbf{E}\left(z^B \mid X=1\right)\mathbf{P}(X=1) + \mathbf{E}\left(z^B \mid X=2\right)\mathbf{P}(X=2).$$

A fenti felsorolásban foglaltak miatt:

1. $\mathbf{E}\left(z^B \mid X=0\right) = \mathbf{E}(z^2) = z^2.$

2. $\mathbf{E}\left(z^B \mid X=0\right) = \mathbf{E}(z^{2+B}) = \mathbf{E}(z^2 z^B) = z^2\mathbf{E}(z^B) = z^2 G_B(z)$.

3. $\mathbf{E}\left(z^B \mid X=0\right) = \mathbf{E}(z^{2+B_1+B_2}) = \mathbf{E}(z^2 z^{B_1} z^{B_2}) = z^2\mathbf{E}(z_1^B)\mathbf{E}(z^{B_2}) = z^2 G_B(z) G_B(z)$, ahol felhasználtuk, hogy B_1 és B_2 függetlenek.

Ezek alapján:

$$G_B(z) = z^2(1-p)^2 + z^2 G_B(z) 2p(1-p) + z^2\left[G_B(z)\right]^2 p^2.$$

Ez egy másodfokú kifejezés $G_B(z)$-ben, amit meg lehet oldani. A megoldás:

$$G_B(z) = \frac{1 - z^2 2p(1-p) - \sqrt{1-4z^2p(1-p)}}{2z^2p^2}.$$

4. Egyszerű elágazó folyamat

Az egyszerű elágazó folyamat modellje:

Adott egy utód eloszlás: $p_0, p_1, p_2, \ldots$. A 0. időpillanatban 1 egyedünk van. Ez az egyed az első óraütésnél létrehoz j egyedet p_j valószínűséggel. Ez azt jelenti, hogy az első óraütés után j egyed van a populációban, ők alkotják az első generációt, számuk $\mathcal{Z}_1$. A második óraütésnél az első generáció minden egyede egymástól függetlenül hoz létre utódokat az utódeloszlás szerint, az első generációban történtektől függetlenül. Ezek az utódok alkotják a második generációt, számuk $\mathcal{Z}_2$. Így folytatjuk az eljárást addig, amíg van utód. Tehát, ha az n-dik generációban $\mathcal{Z}_n$ egyed van, akkor minden egyed egymástól függetlenül, és a korábbi generációkban történtektől függetlenül hoz létre utódokat. Minden egyed utódszámának az eloszlása az utódeloszlást követi.

Két dolgot szeretnénk megvizsgálni, az n-dik generáció nagyságáról szeretnénk valamit megtudni, továbbá a kihalási valószínűséget szeretnénk megvizsgálni.

Ehhez szükségünk van a folyamat formális leírására. Legyen

$X_i^{(n)}$ az n-dik generáció i-dik egyedének az utódszáma, azaz ez az egyed mennyivel járul hozzá az $(n+1)$-dik generációhoz. Feltételezésünk szerint $X_i^{(n)}$ minden n-re és i-re függetlenek egymástól. A modell szerint

$$\mathcal{Z}_0 = 1$$

$$\mathcal{Z}_1 = X_1^{(0)}$$

$$\mathcal{Z}_2 = X_1^{(1)} + X_2^{(1)} + \cdots + X_{\mathcal{Z}_1}^{(1)}$$

általában:

$$\mathcal{Z}_{n+1} = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} + \cdots + X_{\mathcal{Z}_n}^{(n)}. \tag{2}$$

Látjuk, hogy ez egy véletlen tagszámú összeg. Így az eloszlását generátorfüggvény segítségével tudjuk leírni. Ehhez legyen $P(z)$ az utódszám eloszlás generátorfüggvénye,

$$P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$$

Az n-dik generáció nagyságának, $\mathcal{Z}_n$-nek a generátorfüggvénye,

$$G_n(z) = \mathbf{P}(\mathcal{Z}_n = 0) + \mathbf{P}(\mathcal{Z}_n = 1)z + \mathbf{P}(\mathcal{Z}_n = 2)z^2 + \ldots \tag{3}$$

4.1. Az n-dik generáció nagysága

A (2) és a 4. tétel alapján:

$$G_{n+1}(z) = G_n(P(z)). \tag{4}$$

Ez egy rekurziót ad nekünk:

$$G_{n+1}(z) = G_n(P(z)) = G_{n-1}(P(P(z))) = G_{n-2}(P(P(P(z)))) = \cdots = \underbrace{P(P(\ldots P(P(z))\ldots))}_{n+1\text{-szeres összetett fv.}}.$$

Ezt átrendezve, azt kapjuk, hogy

$$G_{n+1}(z) = P(G_n(z)). \tag{5}$$

Ezt felhasználhatjuk az n-dik generáció nagyságának a várható értékének a kiszámítására:

$$\mathbf{E}\mathcal{Z}_{n+1} = G'_{n+1}(1) = P'(G_n(1)) \cdot G'_n(1) = P'(1) \cdot G'_n(1).$$

Legyen m az utódszám eloszlás várható értéke, azaz $m = P'(1)$. Továbbá, legyen $m_n = \mathbf{E}\mathcal{Z}_n = G'_n(1)$. Ekkor az előző egyenlőség alapján

$$m_{n+1} = m \cdot m_n,$$

amiből rekurzió segítségével, $m_{n+1} = mm_n = mmm_{n-1} = \ldots$, azt kapjuk, hogy

$$m_n = m^n.$$

Megjegyezzük, hogy G_n-re néhány eset kivételével nem adható zárt formula.

A fentihez hasonló rekurzióval hasonló formula adható a szórásnégyzetre is, ezt foglaljuk össze a következőben.

1. <u>állítás</u>. Legyen m és σ az utódeloszlás várható értéke, és szórásnégyzete ebben a sorrendben. Ekkor

$$\mathbf{E}\mathcal{Z}_n = m^n.$$

$$\mathbf{D^2}(\mathcal{Z}_n) = m^{n-1}\frac{m^n - 1}{m - 1}\sigma^2, \quad \text{ha} \quad m \neq 1,$$

$$\mathbf{D^2}(\mathcal{Z}_n) = n\sigma^2, \quad \text{ha} \quad m = 1.$$

4.2. Kihalási valószínűségek

Itt azt fogjuk megvizsgálni, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az n-dik generációra kihal a folyamat, illetve, hogy véges időben kihal:

$$\pi_n = \mathbf{P}(\mathcal{Z}_n = 0) = \mathbf{P}(\text{az } n\text{-dik generációra kihal a folyamat}),$$

$$\pi = \mathbf{P}(\exists n, \mathcal{Z}_n = 0) = \mathbf{P}(\text{véges időben kihal a folyamat}).$$

A $\mathcal{Z}_n$ generátorfüggvényének definíciójából (3) látjuk, hogy

$$\pi_n = G_n(0).$$

Így tudjuk meghatározni, hogy az n-dik generációra kihal a folyamat. Mivel G_n kiszámítása általában nem lehetséges, ezért π_n meghatározása is általában nehéz.

Most foglalkozzunk a véges időben valós kihalás valószínűségével.

Tények:

1. $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, amiből $\mathbf{P}(Z_n = 0) \leq \mathbf{P}(Z_{n+1} = 0)$, azaz $\pi_n \leq \pi_{n+1}$
2. $\pi_n = \mathbf{P}(Z_n = 0) = G_n(0)$
3. $G_{n+1}(z) = P(G_n(z)) \Rightarrow \pi_{n+1} = G_{n+1}(0) = P(G_n(0)) = P(\pi_n)$, $\pi_{n+1} = P(\pi_n)$

Ezekből az következik, hogy
$\pi = \mathbf{P}(\text{valamikor kihal a folyamat}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{k.\ \text{generációban hal ki}\}\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{Z_k = 0\}\right) =$
$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \pi_n$, azaz $\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n$

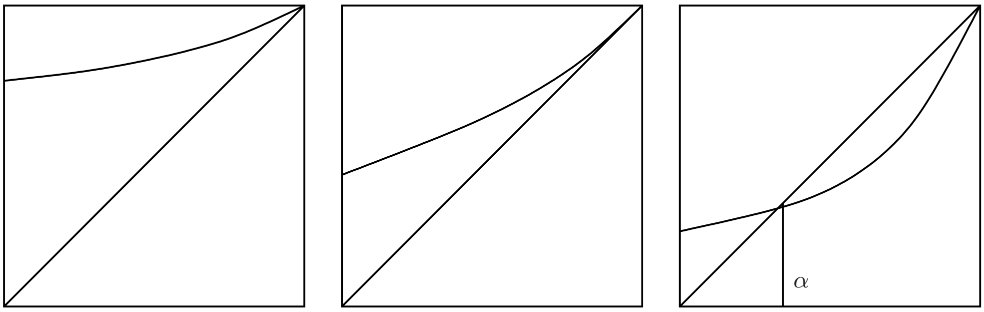
Tehát π a $\pi = P(\pi)$ egyenlet megfelelő megoldása. Pontosabban a következő az igazság:

5. <u>tétel</u>. A véges időben való kihalás valószínűsége a

$$P(z) = z$$

fixpont egyenlet legkisebb megoldása.

Figyeljük meg, hogy $P(z)$ szigorúan nő a $[0, 1]$ intervallumon (az első derivált pozitív $[0, 1]$-en) $P(z)$ konvex a $[0, 1]$ intervallumon (a második derivált pozitív $[0, 1]$-en). Továbbá $P(1) = 1$, ez tehát egy megoldás, és $P'(1) = m$ a $P(z)$ érintőjének a meredeksége az 1 pontban. Három eset lehetséges a fixpont egyenlet megoldására, ahogy azt az 1.. ábrán (Figure 1.) összefoglaltuk.



$P'(1) = m < 1$	$P'(1) = m = 1$	$P'(1) = m > 1$
szubkritikus	kritikus	szuperkritikus
$\pi_n = G_n(0) \to 1$	$\pi_n = G_n(0) \to 1$	$\pi_n = G_n(0) \to \alpha$
exp. gyorsan	hatvány rendben	

Figure 1.: A kihalási valószínűségek az utódeloszlás várható értéke, m függvényében.

9. *példa.* Tekintsük az $M/M/1$ kiszolgáló rendszert. A λ és μ paraméterek függvényeként határozzuk meg a

$$\mathbf{P}\,(\text{egy foglaltsági időn belül kiszolgált igények száma véges})$$

valószínűséget.

Megjegyezzük, hogy egy kiszolgáló rendszer akkor lehet stabil, ha ez valószínűség 1.

A fenti valószínűséget egy megfelelő elágazó folyamat konstruálásával fogjuk meghatározni, illetve az 5. tétel használatával.

Az utódeloszlás Geometriai eloszlású $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ paraméterrel. Ekkor a 2. példát használva

$$P(z) = \frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{1 - \left(1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) z},$$

azaz

$$\frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{1 - \left(1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right) z} = z,$$

ahonnan

$$\lambda z^2 - (\lambda + \mu) z + \mu = 0,$$

tehát

$$z_{1,2} = \frac{\lambda + \mu \pm \sqrt{(\lambda+\mu)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda} = \frac{\mu}{\lambda},\ 1.$$

Akkor stabil a rendszer, ha $\pi = 1$, azaz $\frac{\mu}{\lambda} \geq 1$, ahonnan $\lambda \leq \mu$. Később ki fog derülni, hogy $\lambda < \mu$ szükséges.