(1) $N :=$ asztalon maradó kockák száma $\quad N \sim Bin(n,p) \quad n=6,\ p=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow g_N(z) = (q+pz)^n \ , \quad \mathbb{E}N = np$$

$$g_N(z) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cancel{z}\right)^6 \ , \quad \mathbb{E}N = 6\cdot\frac{2}{3} = 4$$

$\cancel{X_i} :=$ az i-edik, asztalon maradó kockán kijövő szám

$$\cancel{Y_i} \sim Uni\{1,2,\dots,6\} \ , \quad g_{Y_i}(z) = \frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6} \ , \quad \mathbb{E}\cancel{Y_i} = \frac{7}{2}$$

$X = S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ véletlen tagszámú összeg

$$\Rightarrow g_X(z) = g_N(g_{Y_i}(z)) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6}{6}\right)^6 ,$$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}N\,\mathbb{E}Y_i = 4\cdot\frac{7}{2} = 14$$

(2) 1. megoldás: ! $n=5000$, $X_1,\dots,X_n \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$ függetlenek, $X_i := \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{. dobás 6-os} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

A kérdés $P(S_n \geq 1000) \approx ?$

1./a.) ~~Hoeffding~~ tétellel: $0 = a_i \leq X_i \leq b_i = 1$, $\quad \mathbb{E}X_i = \frac{1}{6} \Rightarrow \mathbb{E}S_n = \frac{5000}{6}$

$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = 5000(1-0)^2 = 5000$, tehát $t := 1000 - \frac{5000}{6} = \frac{1000}{6} > 0$

választással $P(S_n \geq 1000) = P(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) =$

$$= \exp\left(-\frac{2\cdot 1000\cdot 1000}{6\cdot 6\cdot 5000}\right) = e$$

$$= e^{-\frac{100}{9}} = e^{-11.1\dot{1}} \approx 1.49\cdot 10^{-5}$$

② Rolutetés

1/b.) Cramér tétellel: $a := \frac{1}{5}$, $b := \infty$, így $a > m = EX_i = \frac{1}{6}$

$$P(S_n \geq 1000) = P\left(\frac{S_n}{n} \in \left[\frac{1000}{5000}; \infty\right)\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b)\right) \underset{\approx}{\leq}$$

$$\overset{\text{Cramér}}{\underset{\approx}{\leq}} e^{-nI(a)}$$

ahol $n = 5000$, $a = \frac{1}{5}$, $I(a) = I\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{1/5}{1-1/5} \cdot \frac{1-1/6}{1/6}\right) + \ln\left(\frac{1-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{6}}\right) =$

$$= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{1}\right) + \ln\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}\right)$$

$$\Rightarrow n I(a) = 1000 \ln \frac{5}{4} + 5000 \ln \frac{24}{25} \approx 19.0336$$

$$\Rightarrow P(S_n \geq 1000) \underset{\approx}{\leq} e^{-19.0336} \approx 5.42 \cdot 10^{-9}$$

2. megoldás: ! $n = 1000$, legyen X_i az i-edik 6-oshoz szükséges dobások száma

az $(i-1)$-edik után, $i = 1, 2, \ldots n$, $X_i \sim \text{Geom}\left(p = \frac{1}{6}\right)$

$S_n := X_1 + \ldots + X_n$ az összes dobás száma. $EX_i = m = \frac{1}{p} = 6$

A kérdés $P(S_n \leq 5000) \approx ?$

A Cramér tétellel $a := -\infty$, $b := 5 < m = 6$, így

$$P(S_n \leq 5000) = P\left(\frac{S_n}{n} \in (-\infty; 5]\right) = P\left(\frac{S}{n} \in (a, b]\right) \underset{\text{Cramér}}{\leq} e^{-nI(b)}$$

ahol $n = 1000$, $b = 5$,

$$I(b) = 5 \ln\left(\frac{5-1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{6}} \cdot \frac{1-\frac{1}{6}}{5-1}\right) = 5 \ln\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5}\right) + \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow n I(b) = 5000 \ln \frac{24}{25} + 1000 \ln \frac{5}{4} \approx 19.0336$$

$$\Rightarrow P(S_n \leq 5000) \underset{\approx}{\leq} e^{-19.0336} \approx 5.42 \cdot 10^{-9}$$

③ a.) $S = \{1,2,3,4\}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

b.) A Markov lánc periodikus $d=2$ periódussal, páros sok lépésben 2-ből csak 2-be és 4-be lehet eljutni $\Rightarrow \mathbb{P}(X_{100}=3 \mid X_0=2)=0$

④ $S=\{1,2,3,4\}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

a.) $(P^T - I)\pi^T = 0$, vagyis $\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right)$, amit megoldva $\tilde{\pi} = (2\ 3\ 3\ 2)$

$$\boxed{\pi = \left(\frac{2}{10}\ \ \frac{3}{10}\ \ \frac{3}{10}\ \ \frac{2}{10}\right)}$$

~~b.) A ML irreducibilis, aperiodikus, véges állapotterű, $n=100$ hosszú idő $\Rightarrow$ ML alaptétele miatt~~

$$\cancel{\mathbb{P}(X_{100}=3 \mid X_0=2) \approx \pi_3 = \frac{3}{10}}$$

! $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a kérdés $f(X_n)$ időátlaga. A ML irreducibilis & véges állapotterű $\Longrightarrow$ az ergodtétel miatt az időátlag

$$E_\pi f = \pi f = \pi_2 + \pi_3 = \frac{6}{10}.$$

(5)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "12"] & \bullet \arrow[l, bend left, "1"] \end{tikzcd}$$

$S := \{0, 1\}$ $\quad X_t :=$ a t-kor működő égők száma

l_{g1} a.) $G = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b.) $\mathbb{P}\left(X_{\frac{1}{365}} = 1 \,\middle|\, X_0 = 0\right) \underset{\text{rövid idő}}{\overset{t=\frac{1}{365}}{\simeq}} \lambda_{01} \cdot t = 12 \cdot \frac{1}{365} \approx 0.033 = 3.3\%$

(vagyis $\approx$ annak a valószínűsége, hogy 1 nap alatt jön a gondnok)

c.) 20 év hosszú idő, tehát a stac. eloszlással közelítünk.

$G^T \vec{\pi} = 0$: $\left(\begin{array}{cc|c} -12 & 1 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \end{array}\right)$ megoldása $\tilde{\pi} = (1 \quad 12)$

$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{13} \quad \frac{12}{13}\right)}$ a M.L. folyt. idejű, irreducibilis, véges állapotterű

$\Rightarrow$ M.L. alaptétele szerint a kezdeti állapottól függetlenül

$\mathbb{P}(X_{100} = 1) \simeq \pi_1 = \frac{12}{13} \approx 92.3\%$

d.) $\mathbb{P}$(2027 januárjában végig működik) $= \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{2027 jan. 1.} \\ \text{00:00-kor műk.}\end{array}\right) \mathbb{P}\left(\begin{array}{c}\text{1 hónapig} \\ \text{nem ég ki}\end{array} \,\middle|\, \begin{array}{c}\text{2027 jan. 1.} \\ \text{00:00-kor} \\ \text{műk.}\end{array}\right) =$

az égő élettartama

$\underset{\text{tul.}}{\overset{\text{Markov}}{=}} \mathbb{P}(X_{2027} = 1)\, \mathbb{P}\left(Exp(1) > \frac{1}{12}\right) \underset{\text{alapt.}}{\overset{\text{M.L.}}{\approx}} \pi_1 \cdot \cancel{\mathbb{P}} \left(1 - F_{Exp(1)}\left(\frac{1}{12}\right)\right) =$

$= \pi_1 \left(1 - \left(1 - e^{-1 \cdot \frac{1}{12}}\right)\right) = \frac{12}{13} \cdot e^{-\frac{1}{12}} \approx 0.849 = \underline{84.9\%}$