Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2017. január 3. 09:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < K)$ valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*

   a.) Az X_k-k független 1 paraméterű exponenciálisok.

   b.) Az X_k-k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$, továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.

   c.) X_k egyenletes a $[0, k]$ intervallumon, és az X_k-k függetlenek.

   d.) Jancsi egy szabályos érmét dobál. X_k legyen 1, ha a k-adik és a $k + 1$-edik dobás is fej, egyébként pedig legyen 0.

2. Egy nagy országban a sok szavazó 2 pártra oszlik: 70%-uk a „Mindenkit Utálunk” párt (MU) híve, 30%-uk pedig a „Becsüljetek Minket” párt (BM) támogatója. Egy közvéleménykutató intézet 500 szavazót kérdez meg a pártszimpátiájáról. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a kutatás a BM pártot mutatja erősebbnek.

   Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

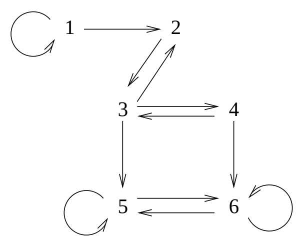
   $$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

   - zárt-e vagy nyílt,
   - lényeges-e vagy lényegtelen,
   - visszatérő-e vagy átmeneti,
   - mennyi a periódusa.



4. Egy számítógépes program négy részfeladatból álló feladatokat old meg. Minden időegység végén feljegyezzük, hogy hanyadik részfeladaton dolgozik éppen – ha pedig éppen üresjáratban vár egy új feladatra, akkor 0-t – vagyis a program a $0, 1, 2, 3, 4$ állapotokban lehet. Az 1, 2, 3 és 4 részfeladatokról a program mindig, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel tud egy időegység alatt továbblépni a következő részfeladatra (úgy értve, hogy a 4 után a 0 jön), a maradék $\frac{1}{2}$ valószínűséggel ugyanazon dolgozik tovább. Ha a program a 0 üresjáratban van, akkor minden időegység alatt $\frac{1}{10}$ valószínűséggel kap feladatot és ugrik az 1 állapotba (az előzményektől függetlenül), ellenkező esetben marad üresjáratban. Modellezzük a program feljegyzett állapotainak sorozatát időben homogén Markov lánccal!

   a.) Írjuk fel a P Markov átmenet-mátrixot.

   b.) Feltéve, hogy kezdetben a program a 0 állapotban van, mi a valószínűsége a „0001223440” megfigyelés-sorozatnak? (A kezdőállapotot is feljegyezzük.)

   c.) Feltéve, hogy a kezdőállapot a 0, mi a közelítő valószínűsége, hogy 1000 időegység után ismét a 0 állapotban van a program?

   d.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a program üresjáratban?

5. Egy egyszerű jelfeldolgozó eszköz az egyes beérkező jeleket független, exponenciális eloszlású véletlen idők alatt dolgozza fel. A feldolgozási idő várható értéke 1 másodperc (vagyis $\frac{1}{60}$ perc). Amíg egy bejövő jel feldolgozása zajlik, addig az esetlegesen beérkező újabb jeleket az eszköz figyelmen kívül hagyja (vagyis nincs feldolgozási sor). A beérkező jelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Az eszköz így kétféle állapotban lehet: „szabad, passzív, jelre vár", illetve „foglalt, feldolgozás folyamatban, nem figyel".

   Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Az időt mérjük percben.

   a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

   b.) Az eszköz a működése első pillanatában szabad. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz óra elteltével éppen foglalt lesz? Miért?

   c.) Az eszköz teljesítményfelvétele passzív állapotban $1W$, feldogozás során viszont $10W$. Mennyi az átlagos teljesítményfelvétel hosszú távon? Miért?