Sztochasztika 2 félvizsga - megoldások

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2016. december 20. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy Galton-Watson elágazó folyamatban az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{\frac{z-1}{2}}$. Mennyi a kihalás valószínűsége?

   Megoldás: $g'(z) = e^{\frac{z-1}{2}}\frac{1}{2}$, így az egylépéses utódszám-eloszlás várható értéke $m = g'(1) = \frac{1}{2}$. Vagyis $m < 1$, a folyamat szubkritikus, ezért a kihalás valószínűsége 1.

2. Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint 2,5 órát kell várni.

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x\ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

   1. Megoldás: Legyen $n = 400$ és $X_1, X_2, \dots, X_n$ az egyes hívások között eltelt idő percben. A feladat szerint ezek függetlenek és azonos 2 paraméterű exponenciális eloszlásúak (mivel a várható értékük $\frac{1}{2}$. Így $S_n := X_1 + \dots + X_n$ a 400-adik hívás ideje, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \le 150)$. Erre a Hoeffding-egyenlőtlenség *nem alkalmazható*, mert az X_k-k nem korlátosak. Marad a Cramér tétel. Ehhez a kérdéses valószínűséget $\mathbb{P}(S_n \le 150) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (0, \frac{3}{8}]) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b])$ alakba írjuk. Mivel $\mathbb{E}X_k = m = \frac{1}{2}$-re $b < m$, a Cramér tétel szerint (az exponenciális eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 2$-vel)

   $$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b]) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-400I(\frac{3}{8})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

   2. Megoldás: Vegyük észre, hogy a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, ezért az 1 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 2$ várható értékkel, és az egyes percek függetlenek. Így ha $n = 150$ és $S_n = X_1 + \dots + X_n$ a 2,5 óra alatt befutott hívások száma, ahol $X_k \sim Poi(2)$, akkor a kérdés $\mathbb{P}(S_n \ge 400)$. Mivel $\frac{8}{3} > m = \mathbb{E}X_k = 2$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 2$-vel)

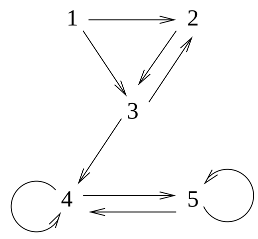
   $$\mathbb{P}(S_n \ge 400) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [\frac{8}{3}, \infty)) \lessapprox e^{-150\cdot I(\frac{8}{3})} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

   3. Megoldás: Pontosan ugyanezt kapjuk akkor is, ha egybevesszük a 2,5 óra alatt érkező összes hívást: a 150 perc alatt érkező hívások száma Poisson eloszlású $\lambda = 300$ várható értékkel. Így alkalmazhatjuk a Cramér tételt az $S_n = X_1$ egytagú összegre ($n = 1$), ahol $X_1 \sim Poi(300)$, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \ge 400)$. Mivel $400 > m = \mathbb{E}X_1 = 300$, a Cramér tétel szerint (a Poisson eloszlás rátafüggvényét használva $\lambda = 300$-zal)

   $$\mathbb{P}(S_n \ge 400) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [400, \infty)) \le e^{-1\cdot I(400)} \approx e^{-15.07} \approx 2.84 \cdot 10^{-7}.$$

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

- zárt-e vagy nyílt,
- lényeges-e vagy lényegtelen,
- visszatérő-e vagy átmeneti,
- mennyi a periódusa.



Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞, vagy nincs
$\{2;3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4;5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Édemes megjegyezni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunkiál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \leftrightsquigarrow j$ reláció („i kommunikál j-vel") egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞, vagy nem definiált.

4. Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

   (a) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.

   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?

   (c) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?

   (d) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

   Megoldás:

   (a) Az állapottér legyeg $S = 1, 2, 3, 4$, és számozzuk a sarkokat az észanyugatitól kezdve, órajárásal ellentétes irányban. Így az átmenetmátrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

   (b)

$$(P^2)_{11} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{5}{16},$$

   amit persze úgy is el lehet mondani, hogy $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ valséggel marad végig ahol volt, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ valséggel elmegy órairányba aztán visszajön, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ valséggel pedig fordítva.

(c) Egy óra hosszú idő, közelítsünk a stacionárius eloszlással, vagyis oldjuk meg a $(P^T - I)\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszert. **A transzponálás nagyon fontos.** Az egyenletrendszer mátrixos alakban, az áttekinthetőség kedvéért néggyel végigszorozva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Innentől

i.) Szabad megsejteni, hogy szimmetria-okból a stacionárius eloszlás az egyenletes, aztán leellenőrizni, hogy a $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{1}{4}$ tényleg kielégíti az egyenletrendszert, *vagy*

ii.) szabad megoldani az egyenletrendszert.

Mindenképpen arra jutunk, hogy $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. A feladat kérdésére a válasz $\pi_3 = \frac{1}{4}$.

(d) Legyen $f : S \to \{0; 1\}$ a napon levés indikátorfüggvénye, vagyis

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = 1 \text{ vagy } x = 4, \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ergodtétel szerint $f(X_n)$ időátlaga hosszú távon $\sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_1 + \pi_4 = \frac{1}{2}$.

5. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

(b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

(c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

(d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

(e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:
X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

(b) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T\pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \mid X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

(d) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i\in S} i \cdot \pi_i = 0 \cdot \frac{6}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f : S \to \mathbb{R}$, $f(i) = i$ függvényt.)

(e) A parkoló az idő $\pi_3 = \frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0 A_{01} + \pi_1 A_{12} + \pi_2 A_{23} = (\pi_0 + \pi_1 + \pi_2) \cdot \frac{1}{5} = \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.