Sztochasztika 2 félvizsga

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2016. december 20. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy Galton-Watson elágazó folyamatban az egylépéses utódszám-eloszlás generátorfüggvénye $g(z) = e^{\frac{z-1}{2}}$. Mennyi a kihalás valószínűsége?

2. Egy kis telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 2. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy reggel 8 órától számítva a 400-adik hívásra kevesebb, mint $2,5$ órát kell várni.

   (Segítség: a λ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

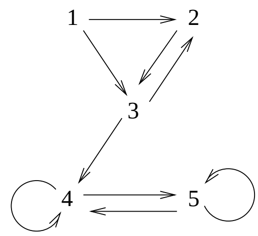
   $$I(x) = \lambda x - \ln(\lambda x) - 1 \quad (\textit{ha } x > 0).$$

   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln(x/\lambda) - x + \lambda \quad (\textit{ha } x > 0).)$$

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

   - zárt-e vagy nyílt,
   - lényeges-e vagy lényegtelen,
   - visszatérő-e vagy átmeneti,
   - mennyi a periódusa.



4. Jancsi és Juliska randit beszélt meg a Kököjszi utca és a Boborján utca kereszteződéséhez. Azt azonban nem beszélték meg, hogy a négy sarok közül melyiken találkozzanak. Jancsi pontban 11 órakor érkezik az északnyugati sarokhoz, majd keresni kezdi Juliskát. A négy gyalogos-lámpa percenként egyszer, egyszerre vált zöldre. Ilyenkor Jancsi $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad, ahol volt, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel órajárás-irányba megy át a zebrán, $\frac{1}{2}$ valószínséggel pedig órajárással ellentétes irányban. Eközben Juliska órákat késik, így Jancsi hosszasan bolyong a négy sarok között. Jelölje X_n Jancsi helyét (vagyis hogy melyik sarkon áll) n perc elteltével.

   (a) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és átmenet-valószínűség-mátrixát.
   (b) Mennyi a valószínűsége, hogy Jancsi két perc elteltével ugyanott van, mint a legelején?
   (c) Egy óra elteltével megközelítőleg mekkora valószínűséggel találjuk Jancsit a délkeleti sarkon?
   (d) A magas házak árnyékot vetnek a délkeleti és a délnyugati sarokra, az északkeleti és az északnyugati sarok viszont napos. Hosszú távon az idő hány százalékát tölti Jancsi napon?

5. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

   (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)
   (b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.
   (c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?
   (d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?
   (e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?