Felsőbb Matematika Informatikusoknak – Sztochasztika
házi feladatok a 2. részhez
2016 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2016.11.04.)

HF 1.1 A postafiókomba az emailek Poisson folyamat szerint érkeznek (éjjel-nappal egyenletesen), naponta átlagosan 24. Minden email a többitől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel spam; $\frac{1}{2}$ valószínűséggel nem spam, de nincs is vele teendő; a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel viszont azt eredményezi, hogy valamit csinálni kell.

a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy reggel 8-tól 10 óráig 4-nél több emailt kapok?

b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 3 olyan email érkezik, amivel teendő lesz?

c.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy 8-tól 10 óráig legalább 5 email érkezik, de spam egy se? (*Vigyázat: Az emailek száma és a spamek száma nem független! Tipp: a spamek száma viszont független a többi email számától. Miért is?)*

2.HF: (Beadási határidő: 2016.11.14.)

HF 2.1 Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$.

a.) $\mathbb{P}(X = 0) =?$

b.) $\mathbb{P}(X = 1) =?$

c.) $\mathbf{E}X =?$

HF 2.2 Egy atomreaktorban sok olyan atommag van, ami maghasadásra képes, ha egy neutron eltalálja. Egy, a reaktorba bekerülő neutron sorsa kétféle lehet:

i.) Kirepül a reaktorból, vagy elnyelődik (pl. egy nem hasadó atommagban) anélkül, hogy hasadást okozna - és ezzel elvész a láncreakció számára. Ennek valószínűsége legyen p.

ii.) Egy hasadásra képes magot eltalálva hasadást okoz. Ő maga elnyelődik, helyette a hasadás során véletlen számú másik neutron szabadul fel: 1, 2 vagy 3, azonos (vagyis $\frac{1-p}{3}$) valószínűséggel.

Az egyes neutronok sorsa független egymástól és az előzményektől. A p paraméter értéke a reaktor méretének és alakjának változtatásával (vagyis szabályozórudak mozgatásával) állítható.

Belövünk a reaktorba egyetlen neutront – legyen ez egymaga a „nulladik generáció”. Az „első generáció” álljon a legelső neutron által okozott hasadás során létrejövő neutronokból (ha van ilyen). A „második generáció” álljon az első generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból. És így tovább, az $n+1$-edik generáció álljon az n-edik generáció tagjai által okozott hasadások során létrejövő neutronokból, $n = 0, 1, 2, \ldots$-re. Jelölje Z_n az n-edik generáció elemeinek számát. Legyen $X = Z_1$, és legyen $N = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ a láncreakcióban résztvevő neutronok össz-száma.

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I.) ha $p = \frac{5}{8}$

II.) ha $p = \frac{1}{4}$.

a.) Mi X eloszlása?

b.) $\mathbf{E}X =?$

c.) Mi X generátorfüggvénye?

d.) $\mathbf{E}Z_{20} =$?

e.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

f.) $\mathbf{E}N =$?

g.) $\mathbb{P}(Z_4 = 0) =$?

h.) Mennyi a valószínűsége, hogy a láncreakció előbb-utóbb leáll, vagyis hogy valamelyik generáció már üres?

3.HF: (Beadási határidő: 2016.11.28.)

HF 3.1 Móricka 10000-szer dob egy szabályos dobókockával.

a.) Közelítsük a centrális határeloszlás tétel (CHT) segítségével annak valószínűségét, hogy a dobott számok átlaga legalább 3.7.

b.) A Berry-Esseen tétel szerint legfeljebb mennyi lehet a CHT közelítés hibája?

HF 3.2 Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 1000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen,

a.) a Hoeffding egyenlőtlenség segítségével,

b.) a Cramér tétel segítségével.

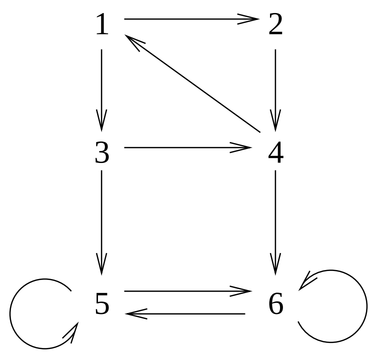
c.) Es akkor mi jön ki, ha $n = 10000$?

(Tipp: Legyen $i = 1, 2, \dots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás.)

Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = -x \ln \frac{p}{x} - (1-x) \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

4.HF: (Beadási határidő: 2016.12.09.)



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

HF 4.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,
* visszatérő-e vagy átmeneti,

* mennyi a periódusa.

HF 4.2 Egy fagyisnál a sorban álló gyerekek száma 0 és 4 között változhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is): ha már 4-en vannak, és egy újabb gyerek be akarna állni, az apukája elrángatja. A fagyis bácsi nagyon igyekszik, de mindig csak $\frac{3}{4}$ valószínűséggel sikerül egy gyereket kiszolgálnia azelőtt, hogy egy újabb érkezne – az előzményektől függetlenül. Kivétel ez alól, ha 4-en vannak, mert akkor persze biztosan sikerül (új gyerek nem tud jönni), illetve ha a sor üres, mert akkor nincs is kit kiszolgálni.

Tekintsük a sorban állók számát *diszkrét időben*: a fagyis bácsi csettint egyet, valahányszor egy gyerek *érkezik vagy elmegy*, vagyis valahányszor a sor hossza változik. A sor hossza mindig pontosan 1-gyel változik (egyszerre csak 1 gyerek tud érkezni és elmenni is), és a fentiek szerint $\frac{3}{4}$ valószínűséggel csökken, a maradék $\frac{1}{4}$ valószínűséggel pedig nő, az előzményektől függetlenül (kivéve ha 4 vagy 0).

Legyen X_n a sor hossza az n-edik csettintés után (vagyis az n-edik sorhossz-változás után).

a.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 lépés után ismét üres?

b.) Kezdetben a sor üres. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 lépés után ismét üres?

c.) Adjuk meg az X_n Markov lánc állapotterét és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját!

d.) Adjuk meg az X_n Markov lánc átmenetmátrixát!

e.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait!

f.) Kezdetben a sor üres. Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés után ismét üres? *(Vigyázat: a feladat cseles, és az erre való tétel csak óvatosan alkalmazható. Egy hibásan alkalmazott tételnél jobb, ha precíz indoklás nélkül megsejtjük a helyes eredményt.)*

g.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz az előző kérdésre, ha a sor hosszára nincs felső korlát?

5.HF: (Beadási határidő: vizsgán.)

HF 5.1 Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „eszik”; 2 – „alszik”; 3 – „sír”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(2.5)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(0.5)$ ideig és a 3-asban $Exp(4)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

a.) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.

b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

c.) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?

d.) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 20 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 100 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?