Bevezetés az algebrába 2 **11. feladatsor** *2024. április 29.*

1. *Egy 10×10-es A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ Az $A - \lambda_1 I$ hatványainak rangja rendre $8, 6, 5, 4, 4$. Az $A - \lambda_2 I$ hatványainak rangja rendre $7, 6, 6$. Írjuk fel A Jordan-féle normálalakját!*

Megoldás: Írjuk fel egy táblázatba a rangok sorozatát (a nulladik hatvánnyal, tehát az egységmátrixszal kezdve). Ekkor a második differenciasorozat adja meg az adott sajátértékhez tartozó adott méretű Jordan-blokkok számát.

k	0		1		2		3		4		5
$r((A-I)^k$	10		8		6		5		4		4
d_k		2		2		1		1		0	
n_k			0		1		0		1		

k	0		1		2		3
$r((A-2I)^k$	10		7		6		6
d_k		3		1		0	
n_k			2		1		

Tehát a Jordan-alakban egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokk, és egy 2×2-es és két 1×1-es 2-blokk van. Azaz $\mathcal{J}(A) = \operatorname{diag}(J_1, J_2, J_3, J_4, J_5)$, ahol

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_4 = [\,2\,], \quad J_5 = [\,2\,]$$

2. *Van-e az A mátrixnak 1-dimenziós, illetve 2-dimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha $U = \operatorname{span}(\mathbf{u})$ egydimenziós invariáns altér, akkor $A\mathbf{u} \in \operatorname{span}(\mathbf{u})$, azaz $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$-re (és fordítva, minden sajátvektor invariáns alteret generál). Viszont A karakterisztikus polinomja $k_A(x) =$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1-x & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2-x & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1-x & -1 & 2 \\ 3 & -2-x & 2 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & 3 & -2-x \end{vmatrix} =$$

$-(-2-6+4+2x+2-2x) - x(-x^3+3x-2-4-3+4-4x+2+x+3-3x) = 2 - x(-x^3-3x) = x^4+3x^2+2 = (x^2+1)(x^2+2)$, tehát A-nak nincs valós sajátértéke, így nincs egydimenziós invariáns altere $\mathbb{R}^4$-ben.

Mivel $k_A(x)$ minden $\mathbb{C}$-beli gyöke egyszeres, A-nak mint komplex mátrixnak a minimálpolinomja is $(x^2+1)(x^2+2)$. De akkor az $\mathbb{R}[x]$-beli minimálpolinomja sem lehet kisebb fokú. Ez azt jelenti, hogy $k_A(A) = (A^2+I)(A^2+2I) = O$, viszont A^2+2I nem nulla, ezért A^2+I nem lehet invertálható. Keressük meg A^2+I magját!

$$A^2 + I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát $\mathrm{Ker}(A^2+I)$ a 2-dimenziós $\mathrm{span}((-1,1,0,0),(0,0,1,1))$ altér, és tudjuk, hogy A tetszőleges polinomjának magtere, tehát ez is, A-invariáns.

Másképp: keressünk egy sajátvektort $\mathbb{C}^4$-ben! A sajátértékek $\pm i$, $\pm 2i$.

$$A-iI=\begin{bmatrix}1-i & 1 & -1 & 0\\ 1 & 1-i & -1 & 2\\ 4 & 3 & -2-i & 2\\ 1 & 0 & 0 & -i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 1 & -1 & 1+i\\ 0 & 1-i & -1 & 2+i\\ 0 & 3 & -2-i & 2+4i\end{bmatrix}\mapsto$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 1 & -1 & 1+i\\ 0 & 0 & -i & i\\ 0 & 0 & 1-i & -1+i\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -i\\ 0 & 1 & 0 & i\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Egy sajátvektor $\mathbf{v}=(i,-i,1,1)$, tehát $A\mathbf{v}=i\mathbf{v}$, így $A\,\mathrm{Re}\,\mathbf{v}+iA\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v}=A\mathbf{v}=i(\mathrm{Re}\,\mathbf{v}+i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v})=-\mathrm{Im}\,\mathbf{v}+i\,\mathrm{Re}\,\mathbf{v}$, s mivel A valós mátrix, ebből $A\,\mathrm{Re}\,\mathbf{v}=-\mathrm{Im}\,\mathbf{v}$ és $A\,\mathrm{Im}\,\mathbf{v}=\mathrm{Re}\,\mathbf{v}$ következik, tehát $U=\mathrm{span}(\mathrm{Re}\,\mathbf{v},\mathrm{Im}\,\mathbf{v})=\mathrm{span}((0,0,1,1),(1,-1,0,0))$ kétdimenziós invariáns altér.

3. *Bizonyítsuk be, hogy ha $A,B\in K^{n\times n}$-re $AB=BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.*

Megoldás: Legyen $V_\lambda\le K^n$ az A λ-hoz tartozó sajátaltere. Ha $\mathbf{v}\in V_\lambda$, akkor $A(B\mathbf{v})=(AB)\mathbf{v}=(BA)\mathbf{v}=B(A\mathbf{v})=B\lambda\mathbf{v}=\lambda(B\mathbf{v})$, tehát $B\mathbf{v}\in V_\lambda$.

4. *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!*

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x)=(x-2)^2(x-1)^2$.
$r(A-2I)=3\Rightarrow\dim V_2=4-3=1\Rightarrow\mathcal{J}(A)$-ban egy 2-blokk van, és így ez 2×2-es.
$r(A-I)=2\Rightarrow\dim V_1=4-2=2\Rightarrow\mathcal{J}(A)$-ban két 1-blokk van, és így ezek 1×1-esek.
Tehát

$$\mathcal{J}(A)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

A $\lambda=2$-höz egyetlen 2 hosszúságú Jordan-láncot kell keresnünk, mert egyetlen 2×2-es Jordan-blokk van. Először $(A-\lambda I)^i$ magterének, K_i-nek a bázisát kell megtalálnunk (most $i=1,2$-re). Aztán az i csökkenő rendjében (az alábbiakban jobbról balra) a K_i bázisából a jobbról érkező Jordan-láncok K_i-beli elemei és a K_{i-1} báziselemei által generált altérhez kiegészítő báziselemeket választani (ezt bonyolultabb esetben Gauss-eliminációval végezhetnénk).

A K_i magtér meghatározásához $(A-\lambda I)^i$ redukált lépcsős alakjára van szükségünk: L_i. Ezután az $(A-\lambda I)^{i+1}$ redukálásához elég az $L_i(A-\lambda I)$ alakból kiindulnunk, mert ha $L_i=P(A-\lambda I)^i$ valamely invertálható P-re, akkor az $L_i(A-\lambda I)=P(A-\lambda I)^{i+1}$ mátrixot is megkaphatjuk az $(A-\lambda I)^{i+1}$ mátrixból ugyanazokkal az elemi sorműveletekkel. Az egyenletrendszerből kihagyhatjuk a $\mathbf{0}$ sorokat, s mivel ezek a jobbról szorzásnál továbbra is $\mathbf{0}$ sorokba mennének, ez nem változtat a későbbi egyenletrendszerek megoldásán. (A Jordan-láncok előállításához nem kell előre meghatározni a Jordan-normálalakot: addig folytatjuk a hatványozást, amíg még csökken a mátrix rangja, vagy egyszerűbben, amíg a magtér dimenziója, azaz $n-$(a rang) el nem éri a λ algebrai multiplicitását.

$$A-2I=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\cdot(A-2I)}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$K_1:\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\qquad K_2:\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda=2$-höz:

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\overset{(A-2I)\cdot}{\longleftarrow}\qquad\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

A $\lambda=1$-hez tartozó általánosított sajátvektorok mind sajátvektorok, tehát a Jordan-láncok itt 1-eleműek, a V_1 bázisát kell csak meghatározni.

$$A-I=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix},\quad\mathbf{b}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Tehát a Jordan-bázis a fenti vektorokból $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4\}$.

B egyetlen sajátértéke a 3.

$$B-3I=\begin{bmatrix}0&3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\cdot(B-3I)}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$K_1:\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\qquad K_2:\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Jordan-lánc(ok) $\lambda=3$-hoz:

$$\mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}3\\0\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\overset{(B-3I)\cdot}{\longleftarrow}\qquad\mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\3\\0\end{bmatrix}\qquad\overset{(B-3I)\cdot}{\longleftarrow}\qquad\mathbf{b}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

A Jordan-bázis a fent kapott $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_4\}$, és a Jordan-normálalak két 2×2-es 3-blokkból áll:

$$\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&3\end{bmatrix}.$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $K\le L$ végtelen testek, és $A,B\in K^{n\times n}$ hasonlók mint L fölötti mátrixok, akkor $K^{n\times n}$-ben is hasonlók!*

Megoldás: A és B akkor hasonlók, ha van olyan P invertálható mátrix, amelyre $P^{-1}AP = B$, azaz $AP = PB$. Ez a P n^2 darab ismeretlen elemére egy lineáris egyenletrendszer, amelynek általános megoldása valahány K-beli vektor (valójában mátrix) paraméter-együtthatós lineáris kombinációja. A feltétel, hogy P invertálható, azt jelenti, hogy $|P| \neq 0$, és P determinánsa a paramétereknek K fölötti többváltozós polinomja. Azt kell tehát belátnunk, hogy ha ennek a polinomnak van olyan L-beli behelyettesítési értéke, ami nem 0, akkor a paraméterekbe alkalmas K-beli elemeket is be tudunk helyettesíteni úgy, hogy az értéke ne legyen 0.
Legyen $f(x_1, \ldots, x_k) \in K[x]$, és tegyük fel, hogy valamely $a_1, \ldots, a_k \in L$ elemekre $f(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$. A változók számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy ekkor van olyan $b_1, \ldots, b_k \in K$, hogy $f(b_1, \ldots, b_k) \neq 0$. $n = 1$-re igaz: egy m fokú egyváltozós nemnulla polinomnak legföljebb m gyöke lehet, és K végtelen. Tegyük fel, hogy $(k-1)$-változós polinomra igaz az állítás. f-et felírhatjuk x_k-nak $K[x_1, \ldots, x_{k-1}]$ fölötti polinomjaként, amelynek nem minden együthatója azonosan nulla L fölött, mert akkor L fölött sem lenne nemnulla behelyettesítés. Tehát valamelyik együtthatónak az indukciós feltevés szerint van $(b_1, \ldots, b_{k-1})$-gyel való K-beli nemnulla értékű behelyettesítése. Tekintsük a $g(x_k) = f(b_1, \ldots, b_{k-1}, x_k)$ egyváltozós polinomot. Mivel ez nem az azonosan nulla polinom, csak véges sok gyöke lehet K fölött is, és így van olyan $b_k \in K$, amelyre $f(b_1, \ldots, b_k) = g(b_k) \neq 0$.
Megj.: Véges testekre is igaz az állítás, csak ez a bizonyítás arra az esetre nem működik.

6. *Bizonyítsuk be, hogy minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához!*

Megoldás: Legyen $A \in K^{n\times n}$, és $L \geq K$ egy bővebb test, amelyben $k_A(x)$ lineáris faktorokra bontható. Ekkor L-ben van A-nak Jordan-normálalakja. Az előző feladat szerint elég belátni, hogy $A \sim A^T$ az L fölött. Legyen $A \sim J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_k)$ az A Jordan-normálalakja a $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \dot\sqcup \ldots \dot\sqcup \mathcal{B}_k$ bázisra való áttéréssel. Legyen $\mathcal{B}'_i$ a $\mathcal{B}_i$ fordított sorrendben. Ekkor az A mátrix a $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \dot\sqcup \ldots \dot\sqcup \mathcal{B}'_k$ bázisban J^T, tehát $J^T \sim J$. Legyen $A = PJP^{-1}$ és $J^T = QJQ^{-1}$. Ekkor
$A^T = (P^{-1})^T J^T P^T = (P^{-1})^T QJQ^{-1} P^T = (Q^{-1}P^T)^{-1} J (Q^{-1}P^T) \sim J \sim A$.

7. *Hasonlóság erejéig hány olyan 3×3-as komplex mátrix van, amelynek a négyzete megegyezik a köbével?*

Megoldás: Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{C}^{3\times3}$, és $A^3 = A^2$. Ekkor A minimálpolinomja osztója az $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ polinomnak. Ebből következik, hogy A sajátértékei csak 0 vagy 1 lehetnek. Ha A diagonalizálható, akkor a Jordan-normálalakja diagonális, 1-ekkel és/vagy 0-kkal az átlóban. Mivel a hasonlósági osztályokban a Jordan-blokkok sorrendje változtatható, csak az számít, hogy hány 1 és hány 0 van az átlóban: ez négy lehetőség. Ha A nem diagonalizálható, akkor a minimálpolinomnak van többszörös gyöke, és ez az $m_A(x) \mid x^2(x-1)$ miatt csak a 0 lehet. Tehát a minimálpolinom vagy x^2, vagy $x^2(x-1)$. Az első esetben a karakterisztikus polinom csak $-x^3$ lehet, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es és egy 1×1-es 0-blokkból áll, a másodikban a karakterisztikus polinom $-x^2(x-1)$, és a Jordan-normálalak egy 2×2-es 0-blokkból és egy 1×1-es 1-blokkból áll. Tehát hasonlóság erejéig hat olyan mátrix van, amelynek a köbe megegyezik a négyzetével, és ezek Jordan-normálalakja

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

8. *Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Mutassuk meg,* *hogy szinguláris mátrixokra ez nem feltétlenül igaz! Adjuk meg az* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix valamelyik négyzetgyökét!*

Megoldás: Elég a a Jordan-blokkokra belátni az állítást, ugyanis akkor egy teljes Jordan-mátrixból is lehet négyzetgyököt vonni (minden diagonális blokkot egy négyzetgyökével helyettesítve), és akkor a $J = P^{-1}AP$ Jordan-normálalak M négyzetgyökével $A = PJP^{-1} = PM^2P^{-1} = (PMP^{-1})^2$.
Legyen J egy $n \times n$-es λ-blokk, és $\mu^2 = \lambda \neq 0$. Ha N egy $n \times n$-es μ-blokk, akkor N^2 átlójában λ, fölötte 2μ, fölötte 1-ek vannak, mindenhol máshol 0. Mivel $\mu \neq 0$, az $N^2 - \lambda I$ mátrix lépcsős alakú, $(n-1)$ rangú, ezért N^2 Jordan-normálalakja egy $n \times n$-es λ-blokk, azaz van olyan invertálható P, amelyre $P^{-1}N^2P = J$, vagyis $J = (P^{-1}NP)^2$.

Szinguláris mátrixból viszont nem feltétlenül lehet négyzetgyököt vonni. Például az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrixnak nem lehet négyzetgyöke, mert ha lenne, annak is csak 0 lehetne a sajátértéke, így minimálpolinomja csak x vagy x^2 lehetne, de akkor annak a négyzete 0 lenne, és nem A.

Az előbbiekben láttuk, hogy a $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ Jordan-blokk négyzete hasonló az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ Jordan-blokkhoz, csak most a hasonlóság mátrixát is meg kell adni.
$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B^2 - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\operatorname{Ker}(B^2 - 2I) = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$, $\operatorname{Ker}(B^2 - 2I)^2 = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, így $\mathbf{e}_2$ egy 2 hosszúságú $(2\sqrt{2}, 0) \xleftarrow{B^2-2I} (0,1)$ Jordan-láncot generál. Így a $P = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ áttérési mátrixszal $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = A$, vagyis A négyzetgyöke $P^{-1}BP = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9. *Határozzuk meg az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát, majd ennek a segítségével számítsuk ki az A^n hatványokat!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: $k_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2 - 6 - 2x + 9 - 3x + 2x = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -(x-1)^3$.
Tehát A egyetlen sajátértéke az 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

miatt $\dim V_1 = 1$, vagyis a J Jordan-normálalak egyetlen Jordan-blokkból áll. A Jordan-bázis így egyetlen Jordan-lánc, és bármely olyan vektor generálhatja, amelyet az $A - \lambda I$-nek csak a harmadik hatványa viszi nullába, s mivel minden vektor általánosított sajátvektor az 1-hez, elég egy tetszőleges olyan vektort választani, amely nincs benne a $\operatorname{Ker}(A - I)^2$ altérben.

$$(A - I)^2 \mapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Így $\mathrm{Ker}((A-I)^2) = \mathrm{span}((1,2,0),(-1,0,2))$, és $\mathbf{v} = (1,0,0)$ ezen kívül van. A $\mathbf{v}$ által generált Jordan-lánc

$$(4,0,-8) \xleftarrow{A-I} (2,2,-2) \xleftarrow{A-I} (1,0,0).$$

Tehát

$$A^n = PJ^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & \binom{n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4n+2 & 2n^2+1 \\ 0 & 2 & 2n \\ -8 & -8n-2 & -4n^2+2n \end{bmatrix} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2n^2+1 & -n^2+2n & n^2 \\ 2n & -n+1 & n \\ -4n^2+2n & 2n^2-5n & -2n^2+n+1 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés: Később látni fogjuk, hogy A^n-et az Hermite-féle polinominterpolációval is ki tudjuk számítani, a Jordan-normálalak és a Jordan-bázis meghatározása nélkül.