1. *Írjuk fel az alábbi mátrix karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját!*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Mivel A felső háromszögmátrix, a karakterisztikus polinom közvetlenül leolvasható belőle: $k_A(x) = -(x-1)(x-2)^2$. Az $m_A(x)$ minimálpolinom osztója ennek, de minden sajátérték gyöke $m_A(x)$-nek, így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ vagy $(x-1)(x-2)^2$.

$$(A-I)(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így $m_A(x) = (x-1)(x-2)$.
(Mellesleg ez abból is következik, hogy $\dim V_2 = 2$, így A minden sajátértékének megegyezik az algebrai és geometriai multiplicitása $\Rightarrow$ A diagonalizálható $\Rightarrow$ a minimálpolinomja a külöböző sajátértékekhez tartozó gyöktényezők szorzata.)

2. *Van-e az egységmátrixon kívül olyan mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, illetve $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben, amelynek az ötödik hatványa az egységmátrix?*

Megoldás: Valós mátrixból van ilyen: az origó körüli 72°-os forgatás mátrixa.
Tegyük fel, hogy $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, és $A^5 = I$. Ekkor az $x^5 - 1$ polinom annullálja az A mátrixot, következésképpen $m_A(x) \mid (x^5 - 1)$. De $x^5 - 1$ irreducibilisekre bontása $\mathbb{Q}[x]$-ben $(x-1)\Phi_5(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, ezért $m_A(x)$ irreducibilis tényezői is ezek közül valók. De $\deg m_A(x) \le \deg k_A(x) = 2$, így csak $x - 1$ szerepelhet $m_A(x)$-ben, s mivel $x^5 - 1$-nek osztója, $m_A(x) = x - 1$, amiből $A = I$ következik. Tehát az egységmátrixon kívül nincs más ilyen racionális elemű mátrix.

3. *Lássuk be, hogy a 2×2-es mátrixok között pontosan azok hasonlók, amelyeknek megegyezik a minimálpolinomjuk, de 3×3-as mátrixokra ez már nem igaz.*

Megoldás: A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak, ezért egy 2×2-es mátrix minimálpolinomja legföljebb másodfokú lehet.
Ha $\deg m_A(x) = 1$, azaz $m_A(x) = x - c$ alakú, akkor $A - cI = O$, azaz $A = cI$, tehát a mátrix (nemcsak hasonlóság erejéig) egyértelmű.
Tfh. $\deg m_A(x) = 2$.
Ha $m(x)$ reducibilis, azaz $m(x) = (x-c)(x-d)$ valamely $c, d \in K$-ra, akkor $c \ne d$ esetén két különböző sajátértéke van, tehát A diagonalizálható, és $A \sim \operatorname{diag}(c, d)$. Ha $c = d$, akkor c az egyetlen sajátértéke, de $\dim V_c = 1$, mert különben $x - c$ lenne a minimálpolinom. Így van olyan $\mathbf{v} \in K^2$, amely nem sajátvektora A-nak. Az ilyen $\mathbf{v}$-re $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek, és az A mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}\}$ bázisban éppen az $m_A(x)$ kísérőmátrixa a kísérőmátrix konstrukciója szerint. Ezért az $(x-c)^2$ minimálpolinomú mátrixok mind hasonlók az $(x-c)^2$ kísérőmátrixához, $\begin{bmatrix} 0 & -c^2 \\ 1 & 2c \end{bmatrix}$-hez, így egymáshoz is.
Ha $m(x)$ irreducibilis, akkor nincs sajátvektora, tehát bármely $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$ vektorra függetlenek a $\mathbf{v}$ és $A\mathbf{v}$ vektorok, s így a $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, A\mathbf{v}\}$ bázisban az előző esethez hasonlóan A mátrixa megegyezik az $m(x)$ kísérőmátrixával. Tehát ebben az esetben is hasonlók az $m(x)$ minimálpolinomú mátrixok.
Viszont a 3×3-as mátrixok közül $m(x) = x(x-1)$ a minimálpolinomja a $\operatorname{diag}(1,1,0)$ és a $\operatorname{diag}(1,0,0)$ mátrixnak is, amelyek nyilván nem hasonlók, mert például különböző rangúak.

4. *Legyen $A = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$ blokkdiagonális mátrix. Bizonyítsuk be, hogy*
a) $k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdot k_{B_2}(x) \cdots k_{B_k}(x)$;
b) $m_A(x) = [m_{B_1}(x), m_{B_2}(x), \cdots, m_{B_k}(x)]$;
c) $r(A) = r(B_1) + r(B_2) + \ldots + r(B_k)$.
Mi a helyzet, ha A csak blokkháromszög alakú?

Megoldás: a) $k_A(x) = |A - xI| = |\operatorname{diag}(B_1 - xI, \dots, B_k - xI)| = |B_1 - xI| \cdots |B_k - xI| = k_{B_1}(x) \cdots k_{B_k}(x)$.

b) Tetszőleges $f(x) \in K[x]$ polinomra $f(A) = \operatorname{diag}(f(B_1), \dots, f(B_k))$, így $f(A) = O \Leftrightarrow f(B_i) = O\ \forall i \Leftrightarrow m_{B_i}(x) \mid f(x)\ \forall i \Leftrightarrow [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)] \mid f(x)$, tehát A minimálpolinomja $m_A(x) = [m_{B_1}(x), \dots, m_{B_k}(x)]$.

c) A teljes mátrixra alkalmazva a $B_1, \dots, B_k$ elemi sorműveleteit, lépcsős alakra hozhatjuk a diagonális blokkokat. Ez az alak, a közbeékelődő **0** soroktól eltekintve az egész mátrixnak is lépcsős alakja lesz (azaz a **0** sorokat az aljára mozgatva lépcsős lesz), tehát az A lépcsős alakjában a nemnulla sorok száma éppen a B_i-k lépcsős alakjában szereplő nemnulla sorok számának összege. Azaz $r(A) = \sum_i r(B_i)$.

Legyen A felső blokkháromszög-mátrix, $B_1, \dots, B_k$ diagonális blokkokkal.
$k_A(x) = k_{B_1}(x) \cdots k_{B_k}(x)$, mivel blokkháromszögmátrix determinánsa is a diagonális blokkok determinánsának szorzata.
A minimálpolinomra már nem igaz a blokkdiagonális esetben érvényes összefüggés, de annyi igen, hogy

$$g(x) = [m_{B_1}, \dots, m_{B_k}]\text{-re } g(x) \mid m_A(x) \mid g(x)^k,$$

ugyanis $m_A(A) = 0$ miatt $m_A(B_i) = 0$ minden i-re (a háromszögmátrix hatványainak, illetve polinomjainak a diagonális blokkjai a megfelelő diagonális blokkok hatványai, illetve polinomjai), így $m_{B_i}(x) \mid m_A(x)$ minden i-re, ezért $g(x) \mid m_A(x)$. Másrészt $g(B_i) = 0$ miatt $g(A)$ minden diagonális blokkja 0, vagyis $g(A)$ a blokkháromszög-felbontáshoz tartozó $V_1 \le V_2 \le \cdots \le V = K^n$ invariáns altérsorozat tagjait az eggyel kisebb indexű altérbe viszi, így $g(A)^k$ mindegyiket nullába viszi, azaz $g(A)^k = 0$, amiből $m_A(x) \mid g(x)^k$.
Ami a rangot illeti, $r(A) \ge \sum r(B_i)$ nyilván igaz, mert a B_i-k lépcsős alakjához tartozó B_i-ben nemnulla sorok itt is függetlenek, mint a blokkdiagonális esetben (a megadott sorrendben lépcsős mátrixot alkotnak), de a nullává tett sorai nem feltétlenül válnak nullává, így a rang lehet a rangok összegénél nagyobb is. Például

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ rangja } 3, \quad r(B_1) + r(B_2) = 1 + 1 = 2.$$

5. *Mi lehet a Jordan-féle normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek a*
a) karakterisztikus polinomja $(x-1)^6$, *minimálpolinomja* $(x-1)^4$, *az 1-hez tartozó* V_1 *sajátaltér dimenziója* 2;
b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^7$, *minimálpolinomja* $(x-\lambda)^3$, $\dim(V_\lambda) = 3$, *ahol* V_λ *a* λ *sajátértékhez tartozó sajátaltér?*

Megoldás: a) 6×6-os mátrix, amelynek csak 1 a sajátértéke, és a Jordan-normálalakjában a legnagyobb blokk 4×4-es, és összesen két Jordan-blokkja van, tehát a Jordan-normálalak egy 4×4-es és egy 2×2-es 1-blokkot tartalmaz.

b) Ez egy 7×7-es mátrix, amelynek egyetlen sajátértéke a λ, legnagyobb Jordan-blokkja 3×3-as, és összesen három Jordan-blokkja van. 7-nek két ilyen felbontása is van:

$7 = 3 + 3 + 1$ vagy $7 = 3 + 2 + 2$, tehát kétféle Jordan-alak is lehetséges:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

6. *Mi az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az első mátrix diagonalizálható (már csak azért is, mert valós szimmetrikus). Mivel minden sorösszege 5, a mátrixnak sajátértéke az 5 az $(1, 1, 1, 1, 1)$ sajátvektorral. A mátrix rangja 1, ezért a 0 is sajátértéke 4-dimenziós sajátaltérrel. Így a mátrix diagonális (és akkor Jordán-féle) alakja $\operatorname{diag}(5, 0, 0, 0, 0)$.

A második mátrix sajátértékei 2 és -5, és a 2-höz tartozó sajátaltér csak 1-dimenziós, tehát a mátrix nem diagonalizálható, és így a Jordan-alakja

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

A harmadik mátrix egyetlen sajátértéke a 2, és $\dim V_2 = 1$, ezért a Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A negyedik mátrix ortogonális, tehát diagonalizálható. A karakterisztikus polinomja $-(x^3 - 1)$, ezért a sajátértékei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$, ahol $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. A Jordan-normálalakja $\operatorname{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$.

7. *Hasonlóság erejéig hány olyan komplex mátrix van, melynek*
a) karakterisztikus polinomja $-(x - 1)^3 (x - 3)^4$*;*
b) minimálpolinomja $(x + 2)^6$*, és sajátaltere 2-dimenziós?*

Megoldás: a) A Jordan-normálalakban az 1-blokkok méretének megoszlása lehet 3, $2+1$ vagy $1 + 1 + 1$, a 3-blokkoké 4, $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ vagy $1 + 1 + 1 + 1$. Ez összesen $3 \cdot 5 = 15$ lehetőség.

b) A mimimálpolinomból következik, hogy a mátrix egyetlen sajátértéke -2, és a legnagyobb Jordan-blokkja 6×6-os. A sajátaltér dimenziója miatt pedig csak két Jordan-blokk lehet, így a 6×6-oson kívül a másik mérete $1, 2, 3, 4, 5$ vagy 6 lehet, ez összesen 6 lehetőség.

8. *Mutassuk meg, hogy ha két 3×3-as vagy 2×2-es komplex mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja megegyezik, akkor a két mátrix hasonló.*

Megoldás: A karakterisztikus polinomban minden $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője legföljebb $a=3$, a minimálpolinomban ezért csak 1, $a-1$ vagy a lehet. A Jordan-normálalakban az első esetben minden λ-blokk 1×1-es, a másodikban van egy $(a-1)\times(a-1)$-es λ-blokk, és akkor azon kívül már csak egy 1×1-es lehet, a harmadikban pedig egyetlen $a\times a$-as λ-blokk van. Tehát ilyen méretű mátrixokra a karakterisztikus polinom és a minimálpolinom meghatározza a Jordan-normálalakot, így ezek között az azonos karakterisztikus és minimálpolinommal rendelkező mátrixok Jordan-normálalakja megegyezik, vagyis az ilyen mátrixok hasonlók egymáshoz.
(4×4-esre ez már nem igaz: például $k_A(x)=(x-1)^4$ és $m_A(x)=(x-1)^2$ igaz a $2+2$-es és a $2+1+1$-es felbontású, 1 sajátértékhez tartozó Jordan-mátrixra is.)

9. *Mi lehet az A^2 mátrix minimálpolinomja, ha $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ minimálpolinomja $(x+1)^2$?*

Megoldás: Ha $(A+I)^2=O$, akkor $(A+I)^2(A-I)^2=(A^2-I)^2=O$, így A^2 minimálpolinomja osztója az $(x-1)^2$ polinomnak. Viszont $x-1$ nem lehet, mert ha $A^2-I=O$ lenne, akkor A minimálpolinomja osztója lenne (x^2-1)-nek. Tehát A^2 minimálpolinomja $(x-1)^2$.

Másképp: A Jordan-alakjában, $\mathcal{J}(A)$-ban csak 2×2-es és 1×1-es -1-blokkok vannak (és van legalább egy 2×2-es). $\mathcal{J}(A)^2$ diagonális blokkjai $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ és $[\,1\,]$ alakúak, tehát 1 az egyetlen sajátértéke, és $(\mathcal{J}(A)^2-I)$-nek a négyzete O, de maga nem, tehát $\mathcal{J}(A)^2$-nek és így a hozzá hasonló A^2-nek is a minimálpolinomja $(x-1)^2$.